

## 壹、研究動機

上學期期末，老師利用文化走讀的課程帶我們徒步到附近的社區參觀，走著走著，我們看到了一座很特別的建築物，遠遠看去好像一座不規則的魔術方塊，後來發現它是利用不同的面與色塊設計出與眾不同風格的建築物，我們突然想到如果增加或減少魔術方塊的面，是不是也可以設計出更不一樣的建築物，這些漂亮的設計彷彿帶我們住進了千變萬化的魔術方塊裡面！



圖 1

於是，我們決定先從最簡單的魔術方塊來探討，看看它如果少了一個方塊、二個方塊……它的面會有什麼樣的變化？並且找出它的規律！

## 貳、研究目的與研究問題

我們想要藉由實際操作三階、四階、五階魔術方塊中，任取二塊、三塊小方塊的方法數與面數的增減，進一步尋找出  $N$  階魔術方塊任取  $n$  塊小方塊的計算公式及面數增減的規律，因此我們的研究問題如下：

- 一、 找出三階魔術方塊任取二塊的組合(方法)數與面數的變化
- 二、 找出三階魔術方塊任取三塊的組合(方法)數與面數的變化
- 三、 找出四階魔術方塊任取二塊的組合(方法)數與面數的變化
- 四、 找出四階魔術方塊任取三塊的組合(方法)數與面數的變化
- 五、 找出五階魔術方塊任取二塊的組合(方法)數與面數的變化
- 六、 找出五階魔術方塊任取三塊的組合(方法)數與面數的變化

## 參、解釋名詞

### 一、三階魔術方塊

三階魔術方塊是一般最常見的魔術方塊，是由六個面(正方形)，八個角，十二個邊所組成的，其中每個面又再切割成9個小正方形；如右圖所示：

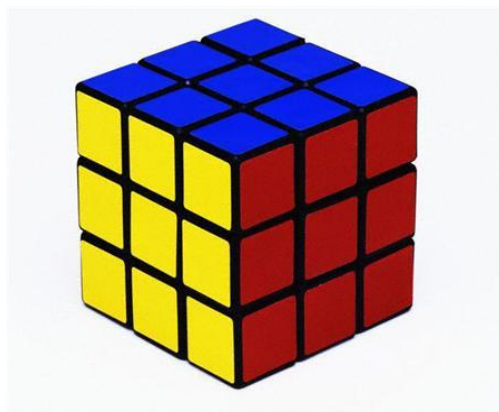


圖 2

### 二、四階魔術方塊

四階魔術方塊是由六個面(正方形)，八個角，十二個邊所組成的。其中每個面又再切割成16個小正方形；如右圖所示：



圖 3

### 三、五階魔術方塊

五階魔術方塊是由六個面(正方形)，八個角，十二個邊所組成的。其中每個面又再切割成25個小正方形；如右圖所示：

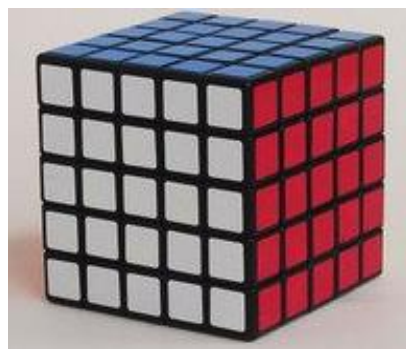

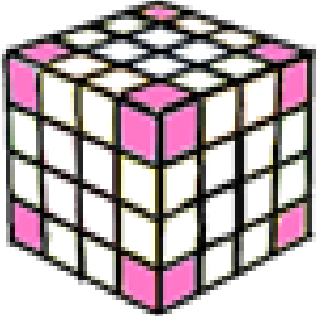
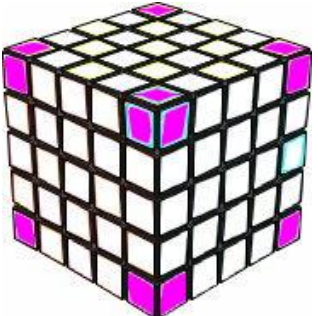


圖 4

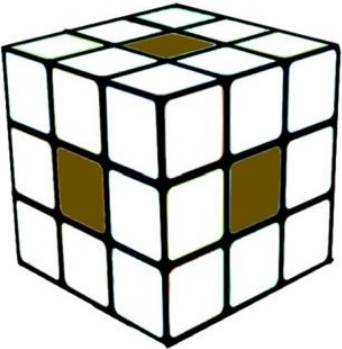
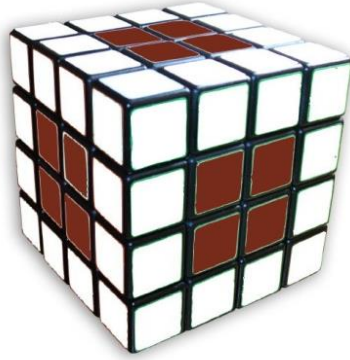
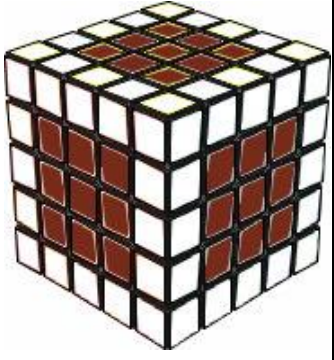
#### 四、角塊

此研究中的角塊是指在魔術方塊中最角落的方塊，如圖所示：

三階魔術方塊角塊	四階魔術方塊角塊	五階魔術方塊角塊
 圖 5	 圖 6	 圖 7

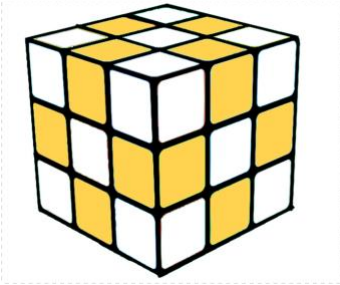
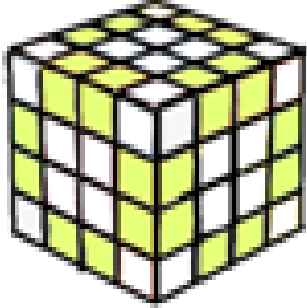
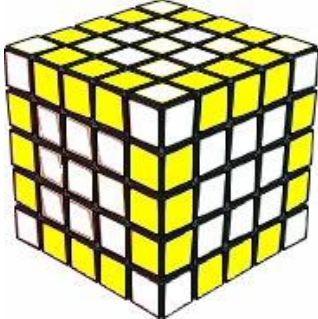
#### 五、中塊

此研究中的中塊是指在魔術方塊中最中心的方塊，如圖所示：

三階魔術方塊中塊	四階魔術方塊中塊	五階魔術方塊中塊
 圖 8	 圖 9	 圖 10

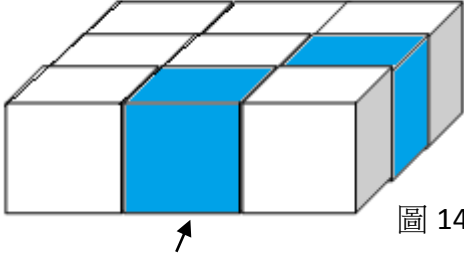
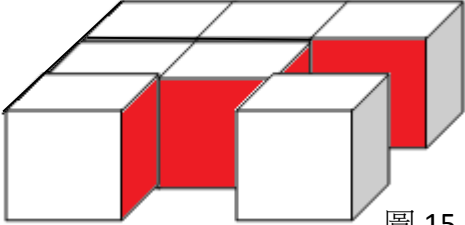
## 六、邊塊

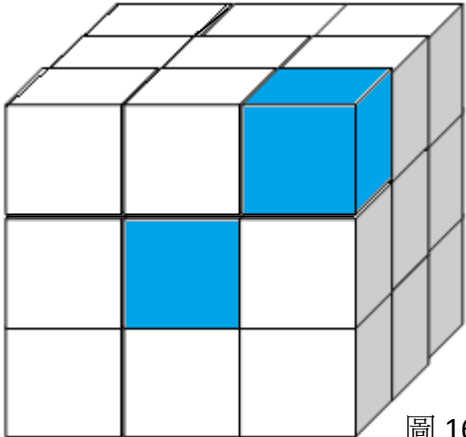
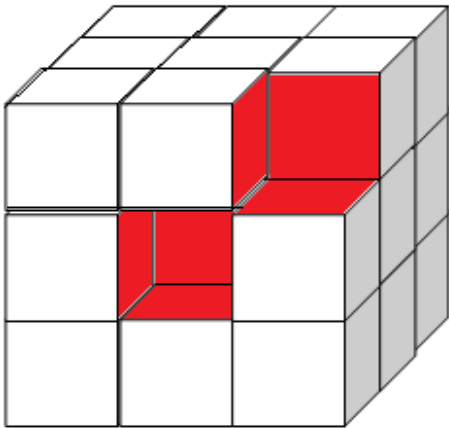
此研究中的邊塊是指在魔術方塊中除了角塊與中塊外的方塊，如圖所示：

三階魔術方塊邊塊	四階魔術方塊邊塊	五階魔術方塊邊塊
 <p data-bbox="432 752 507 786">圖 11</p>	 <p data-bbox="820 757 895 790">圖 12</p>	 <p data-bbox="1235 763 1310 797">圖 13</p>

## 七、面數之變化

此研究中面數之變化意指在魔術方塊中任意取走兩個或是三個小方塊後的面數與原本未取走之前裸露在外的面數相比較，觀察其差異情形，以三階魔術方塊取走二塊(一層、立體)為例，如下圖所示：


三階魔術方塊取前的面數(任一層)	三階魔術方塊取走二塊後的面數(任一層)
 <p data-bbox="762 1503 837 1536">圖 14</p> <p data-bbox="308 1570 815 1653">藍色的面為原來的裸露在外的面數， 有三面(包含下面)</p>	 <p data-bbox="1310 1496 1385 1529">圖 15</p> <p data-bbox="946 1570 1366 1603">紅色的部分為取走之後的面數</p>
<p data-bbox="400 1738 1342 1783">面數的變化 = 紅色的部分 - 藍色的部分 = (3+3) - (3+3) = 0</p>	

三階魔術方塊取前的面數(立體)	三階魔術方塊取走二塊後的面數(立體)
 <p style="text-align: right;">圖 16</p> <p>藍色的面為原來的裸露在外的面數</p>	 <p style="text-align: right;">圖 17</p> <p>紅色的部分為取走之後的面</p>
<p>面的變化 = 紅色的部分 - 藍色的部分 = <math>(5+3) - (1+3) = 4</math></p>	

#### 肆、預備知識

##### 一、組合(方法)數的取法

在研究魔術方塊任意取兩個或是三個方塊時，取的方法如下(以三階魔術方塊取二-任一層為例)，其餘方法數的取法以此類推。

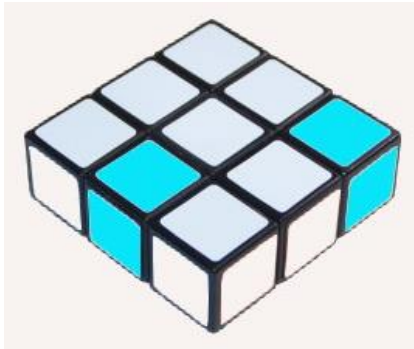
任意取兩個	取方塊的方法	方法數	 <p style="text-align: right;">圖 18</p>
角塊 + 邊塊	$C_{\substack{\text{總共有四個角塊} \\ \text{任選一個角塊}}} \times C_{\substack{\text{不相鄰的邊塊有兩個} \\ \text{任選一個不相鄰的邊塊}}}$	$C_1^4 \times C_1^2$	

二、 $C_m^n$  表示從  $n$  種不同的事物中取  $m$  個組合的方法數，其中

$$C_m^n = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \cdots \times (n-m+1)}{m \times (m-1) \times (m-2) \cdots \times 1}$$

## 伍、研究過程或方法

### 問題一：找出三階魔術方塊任取二塊的組合(方法)數與面數的變化

<p>一、三階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊：</p> <p style="padding-left: 40px;">我們先研究在三階魔術方塊中，任一層任取兩個小方塊的組合數有幾種。以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！</p>	 <p>圖 18</p>
---	---

#### (一)、三階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊的組合(方法)數

依據三階魔術方塊，我們先拆解一層下來，探討在一層的情況下，若任意取走兩個小方塊，它會有幾種組合(方法)數？下表分別列出在全相鄰與不相鄰的情況下，任意取走兩個方塊的組合數。

表 1：三階魔術方塊取二(任一層)組合數之分析表

	全相鄰	不相鄰
角塊+角塊	×	$C_2^4$
角塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	$C_1^4 \times C_1^2$
角塊+中塊	×	$C_1^4 \times C_1^1$
邊塊+邊塊	×	$C_2^4$
邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^1$	×
中塊+中塊	×	×

#### (二) 三階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊的前後面數變化之分析

根據上表，我們可以再延伸討論面數的變化，單獨取走一個角塊，可以多出二個面，再扣除原本接觸在外的四個面，所以總面數會減少 2；單獨取走一個邊塊，可以多出三個面，再扣除原本接觸在外的三個面，所以總面數無增無減；單獨取走一個中塊，可以多出四個面，再扣除原本接觸在外的二個面，所以總面數會增加 2；由此規律不難發現，在一個三階取二平面的魔術方塊中，任取走一個方塊後，本來接觸在外的面數與被抽取過後其多出來的面數相加起來會等於六。根據此，我們做了以下有關於面數的變化之分析，並製成下表...



表 2：三階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊之面數的變化分析表

	全相鄰				不相鄰			
	組合數	原有的面	後來的面	面數變化	組合數	原有的面	後來的面	面數變化
角塊+角塊	×	×	×	×	$C_2^4$	8	4	-2-2
角塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	7	3	-4	$C_1^4 \times C_1^2$	7	5	-2+0
角塊+中塊	×	×	×	×	$C_1^4 \times C_1^1$	6	6	-2+2
邊塊+邊塊	×	×	×	×	$C_2^4$	6	6	0+0
邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^1$	5	5	0	×	×	×	×
中塊+中塊	×	×	×	×	×	×	×	×

## 二、三階魔術方塊取二(立體)

我們再研究在三階魔術方塊的狀況下，任取兩個小方塊的組合數有幾種？以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主

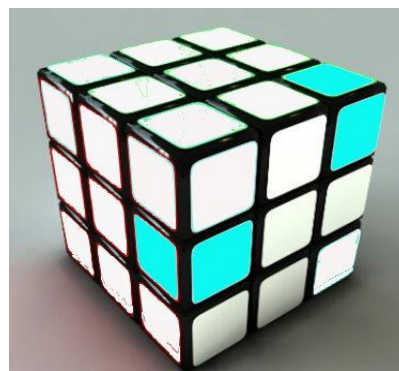


圖 19

### (一)、三階魔術方塊中，任取兩個小方塊的組合(方法)數

依據三階魔術方塊，若任意取走兩個小方塊，它會有幾種組合(方法)數？下表分別列出在全相鄰與不相鄰的情況下，任意取走兩個方塊的組合數。

表 3：三階魔術方塊取二(立體)組合數之分析表

	全相鄰	不相鄰
角塊+角塊	×	$C_2^8$
角塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3$	$C_1^8 \times C_1^9$
角塊+中塊	×	$C_1^8 \times C_1^6$
邊塊+邊塊	×	$C_2^{12}$
邊塊+中塊	$C_1^{12} \times C_1^2$	$C_1^{12} \times C_1^4$
中塊+中塊	×	$C_2^6$

(二) 三階魔術方塊中，取兩個小方塊的前後面數變化之分析

根據上表，我們可以再延伸討論面數的變化，單獨取走一個角塊，可以多出三個面，再扣除原本接觸在外的三個面，所以總面數無增無減；單獨取走一個邊塊，可以多出四個面，再扣除原本接觸在外的二個面，所以總面數增加 2；單獨取走一個中塊，可以多出五個面，再扣除原本接觸在外的面，所以總面數增加 4；由此規律不難發現，在一個魔術方塊中，本來接觸在外的面數與被抽取過後其多出來的面數相加起來會等於六。根據此，我們做了以下有關於面數的變化之分析，並製成下表。

表 4：三階魔術方塊中，任取兩個小方塊之面數的變化分析表

	全相鄰				不相鄰			
	組合數	原有的面	後來的面	面數變化	組合數	原有的面	後來的面	面數變化
角塊 + 角塊	×	×	×	×	$C_2^8$	6	6	0+0
角塊 + 邊塊	$C_1^8 \times C_1^3$	5	5	0	$C_1^8 \times C_1^9$	5	7	0+2
角塊 + 中塊	×	×	×	×	$C_1^8 \times C_1^6$	4	8	0+4
邊塊 + 邊塊	×	×	×	×	$C_2^{12}$	4	8	2+2
邊塊 + 中塊	$C_1^{12} \times C_1^2$	3	7	+4	$C_1^{12} \times C_1^4$	3	9	2+4
中塊 + 中塊	×	×	×	×	$C_2^6$	2	10	4+4

【結論】

根據以上的規則，在計算不相鄰情況的時候，取出一個方塊後，所多出的面，我們可以歸納出以下幾個重點！（如表 5）

表 5

平面		立體	
角塊	-2	角塊	0
邊塊	0	邊塊	+2
中塊	+2	中塊	+4

接下來我們就依此規律依序找出其面數的前後變化。



問題二：找出三階魔術方塊任取三塊的組合(方法)數與面數的變化

一、三階魔術方塊中，任一層取三個小方塊：

我們先研究在三階魔術方塊中，任一層任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！

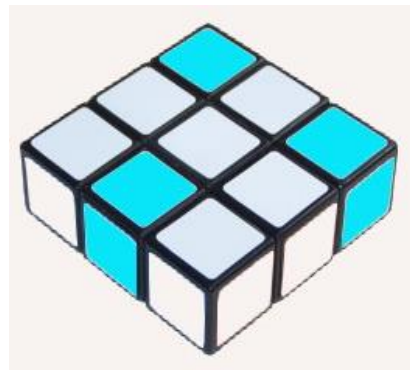


圖 20

表 6：三階魔術方塊取三(任一層)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部分相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊+角塊	×	×	×	×	$C_3^4$	-6
邊塊+邊塊+邊塊	×	×	×	×	$C_3^4$	0
角塊+角塊+中塊	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^1$	-2
角塊+角塊+邊塊	$C_1^4 \times C_2^2$	-8	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2$	-6	$C_1^4 \times C_2^2$	-4
邊塊+邊塊+角塊	$C_1^4 \times C_2^2$	+6	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2$	-4	$C_1^4 \times C_2^2$	-2
邊塊+邊塊+中塊	$C_2^4 \times C_1^1$	-2	×	×	×	×
角塊+邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-4	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	×	×
中塊+中塊+中塊	×	×	×	×	×	×
中塊+中塊+角塊	×	×	×	×	×	×
中塊+中塊+邊塊	×	×	×	×	×	×

二、三階魔術方塊取三(立體)：

我們再研究在三階魔術方塊立體的狀況下，任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主



圖 21

表 7：三階魔術方塊取三(立體)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部分相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊+角塊	×	×	×	×	$C_3^8$	0
邊塊+邊塊+邊塊	×	×	×	×	$C_3^{12}$	+6
中塊+中塊+中塊	×	×	×	×	$C_3^6$	+12
角塊+角塊+中塊	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^6$	+4
角塊+角塊+邊塊	$C_1^{12} \times C_2^2$	-2	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^6$	0	$C_1^{12} \times C_2^6$	+2
邊塊+邊塊+角塊	$C_1^8 \times C_2^3$	0	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^9$	+2	$C_1^8 \times C_2^9$	+4
邊塊+邊塊+中塊	$C_1^6 \times C_2^4$	+4	$C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^8$	+6	$C_1^6 \times C_2^8$	+8
中塊+中塊+角塊	×	×	×	×	$C_2^6 \times C_1^8$	+8
中塊+中塊+邊塊	$C_1^{12} \times C_2^2$	+6	$C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^4$	+8	$C_1^{12} \times C_2^4$	+10
角塊+邊塊+中塊	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^2$	+2	$C_1^6 \times C_1^4 \times$ $C_1^6 + C_1^8 \times C_1^3$ $\times C_1^4$	+4	$C_1^8 \times C_1^9 \times C_1^4$	+6

問題三：找出四階魔術方塊取二的組合(方法)數與面數的變化

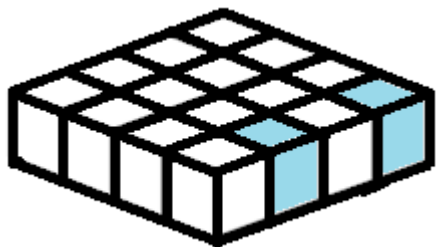
<p>一、四階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊：</p> <p style="text-align: center;">我們先研究在四階魔術方塊中，任一層任取兩個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！</p>	 <p>圖 22</p>
--	--

表 8：四階魔術方塊取二(任一層)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面數	不相鄰	面數
角塊+角塊	×	×	$C_2^4$	-2-2
角塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	-4	$C_1^4 \times C_1^6$	-2+0
角塊+中塊	×	×	$C_1^4 \times C_1^4$	-2+2
邊塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^1 \div 2$	-2	$C_1^8 \times C_1^6 \div 2$	+0+0
邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^2$	+0	$C_1^8 \times C_1^3$	+0+2
中塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^2 \div 2$	+2	$C_1^4 \times C_1^1 \div 2$	+2+2

二、四階魔術方塊取二(立體)：

我們再研究在四階魔術方塊的狀況下，任取兩個小方塊的組合數有幾種？以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主

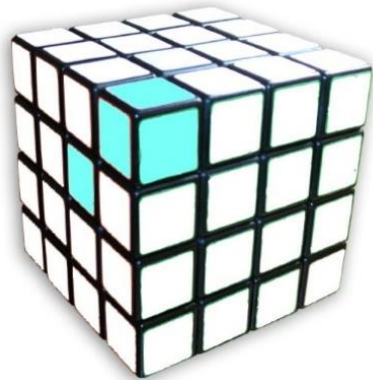


圖 23

表 9：四階魔術方塊取二(立體)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊	$\times$	$\times$	$C_2^8$	$+0+0$
角塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3$	$+0$	$C_1^8 \times C_1^{21}$	$+0+2$
角塊+中塊	$\times$	$\times$	$C_1^8 \times C_1^{24}$	$+0+4$
邊塊+邊塊	$C_1^{24} \times C_1^{\div 2}$	$+2$	$C_1^{24} \times C_1^{22 \div 2}$	$+2+2$
邊塊+中塊	$C_1^{24} \times C_1^2$	$+4$	$C_1^{24} \times C_1^{22}$	$+2+4$
中塊+中塊	$C_1^{24} \times C_1^{\div 2}$	$+6$	$C_1^{24} \times C_1^{21 \div 2}$	$+4+4$

問題四：找出四階魔術方塊取三的組合(方法)數與面數的變化

一、四階魔術方塊中，任一層取三個小方塊：

我們先研究在四階魔術方塊中，任一層任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！

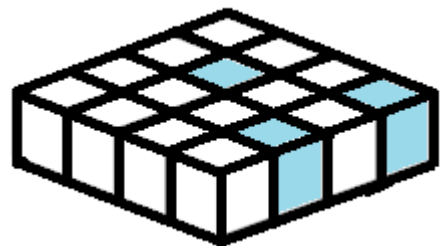


圖 24

表 10：四階魔術方塊取三(任一層)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部分相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊+角塊	×	×	×	×	$C_3^4$	-6
角塊+角塊+邊塊	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-6	$C_2^4 \times C_1^4$	-4
角塊+角塊+中塊	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-2
邊塊+邊塊+邊塊	×	×	$C_1^8 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^6$	-2	$C_1^8 \times C_1^6 \times C_1^4 \div 6$	+0
邊塊+邊塊+角塊	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-6	$C_1^8 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^5$	-4	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^2 \div 2$	-2
邊塊+邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^8 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^5$	+0	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^2 \div 2$	+2
中塊+中塊+中塊	$C_3^4$	+2	×	×	×	×
中塊+中塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^4$ $C_1^4$	+0	$C_1^4 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^2 \div 2 \times C_1^4$ $C_1^4$	+2	$C_1^4 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^4$	+4
中塊+中塊+角塊	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^4 \div 2$	+0	$C_1^4 \times C_1^1 \div 2 \times C_1^4$	+2
角塊+邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-4	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	-2	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^3$	+0

二、四階魔術方塊取三(立體)：

我們再研究在四階魔術方塊立體的狀況下，任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主

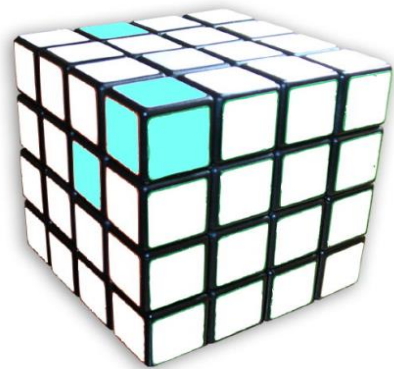
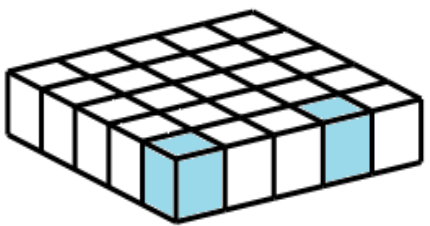


圖 25

表 11：四階魔術方塊取三(立體)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部分相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊+角塊	×	×	×	×	$C_3^8$	+0
角塊+角塊+邊塊	×	×	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^7$	0	$C_1^{24} \times C_2^7$	+2
角塊+角塊+中塊	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^{24}$	+4
邊塊+邊塊+邊塊	×	×	$C_1^{24} \times C_1^1 \div 2 \times C_1^{22}$	+4	$C_1^{24} \times C_1^{22} \times C_1^{20} \div 6$	+6
邊塊+邊塊+角塊	$C_1^8 \times$ $C_2^3 + C_1^8 \times$ $C_1^3 \times C_1^1$	0	$C_1^{24} \times C_1^1 \div 2 \times$ $C_1^6 + C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{20}$	+2	$C_1^{24} \times C_1^1 \div 2 \times$ $C_1^7 + C_1^{24} \times C_1^{20} \div 2 \times$ $C_1^6$	+4
邊塊+邊塊+中塊	$C_1^{24} \times C_2^2$	+4	$C_1^{24} \times C_1^1 \div 2 \times$ $C_1^{20} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{21}$	+6	$C_1^{24} \times C_1^2 \div 2 \times$ $C_1^{21} + C_1^{24} \times C_1^{20} \div 2 \times$ $C_1^{20}$	+8
中塊+中塊+中塊	$C_1^{24} \times C_2^2$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \div 2 \times C_1^{20}$	+10	$C_1^{24} \times C_1^1 \div 2 \times$ $C_1^{20} + C_1^{24} \times C_1^{20} \times$ $C_1^{16}$	+12
中塊+中塊+角塊	×	×	$C_1^{24} \times C_1^2 \div 2 \times C_1^8$	+6	$C_1^{24} \times C_1^{21} \div 2 \times C_1^8$	+8
中塊+中塊+邊塊	$C_1^{24} \times$ $C_2^2 + C_1^{24}$ $\times C_1^2 \times C_1^2$	+6	$C_1^{24} \times C_1^2 \div 2 \times C_1^{20} +$ $C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{20}$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{21} \div$ $2 + C_1^{24} \times C_1^{20} \div 2 \times$ $C_1^{19}$	+10
角塊+中塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3 \times$ $C_1^2$	+2	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{22} + C_1^{24}$ $\times C_1^2 \times C_1^7$	+4	$C_1^8 \times C_1^{21} \times C_1^{22}$	+6

問題五：找出五階魔術方塊取二的組合(方法)數與面數的變化

<p>一、五階魔術方塊中，任一層取兩個小方塊：</p> <p style="text-align: center;">我們先研究在五階魔術方塊中，任一層任取兩個小方塊的組合數有幾種？</p> <p>以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！</p>	 <p>圖 26</p>
---	--

因為進入五階之後，方塊數變多了，扣除最外面的一圈方塊數，裡面其實就是一個小小的三階平面，所以，我們再將五階平面做以下的內部分析，綠色代表外角，紫色代表外邊，紅色代表中塊，我們又進而將紅色中塊的部分分成內角、內邊、中塊逐一分析！如下圖所示：

外角	外邊	外邊	外邊	外角
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外邊	內邊	中	內邊	外邊
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外角	外邊	外邊	外邊	外角

圖 27

表 12：五階魔術方塊取二內部之組合數與面數變化之分析表

		相鄰	面	不相鄰	面
角塊 + 角塊	外角、外角	×	×	$C_2^4$	-4
角塊 + 邊塊	外角、外邊	$C_1^4 \times C_1^2$	-4	$C_1^4 \times C_1^{10}$	-2
角塊 + 中塊	外角、內角	×	×	$C_1^4 \times C_1^4$	0
	外角、內邊	×	×	$C_1^4 \times C_1^4$	0
	外角、中	×	×	$C_1^4 \times C_1^1$	0
邊塊 + 邊塊	外邊、外邊	$C_1^4 \times C_1^2$	-2	$C_1^4 \times C_1^9 \div 2 + C_1^8 \times C_1^{10} \div 2$	0
邊塊 + 中塊	外邊、內角	$C_1^4 \times C_1^2$	0	$C_1^4 \times C_1^{10}$	+2
	外邊、內邊	$C_1^4 \times C_1^1$	0	$C_1^4 \times C_1^{11}$	+2
	外邊、中	×	×	$C_1^{12} \times C_1^1$	+2
中塊 + 中塊	內角、內角	×	×	$C_2^4$	+4
	內角、內邊	$C_1^4 \times C_1^2$	+2	$C_1^4 \times C_1^2$	+4
	內角、中	×	×	$C_1^4 \times C_1^1$	+4
	內邊、內邊	×	×	$C_2^4$	+4
	內邊、中	$C_1^4 \times C_1^1$	+2	×	×

將表 12 中，相同的條件情形下，彙整成下表



表 13：五階魔術方塊取二(任一層)組合數與面數變化之分析表

	相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊	$\times$	$\times$	$C_2^4$	-4
角塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	-4	$C_1^4 \times C_1^{10}$	-2
角塊+中塊	$\times$	$\times$	$C_1^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4$	0
邊塊+邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	-2	$C_1^4 \times C_1^9 \div 2 + C_1^8 \times C_1^{10} \div 2$	0
邊塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^1$	0	$C_1^4 \times C_1^{10} + C_1^{12} \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^{11}$	+2
中塊+中塊	$C_1^4 \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^2$	+2	$C_2^4 + C_1^4 \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^2 + C_2^4$	+4

二、五階魔術方塊取二(立體)：

我們再研究在五階魔術方塊的狀況下，任取兩個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰與不相鄰兩種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主

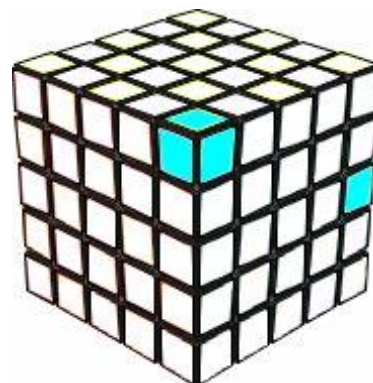


圖 28

因為進入五階之後，方塊數變多了，扣除最外面的一圈方塊數，裡面其實就是一個小小的三階平面，所以，我們再將五階平面做以下的內部分析，綠色代表外角，紫色代表外邊，紅色代表中塊，我們又進而將紅色中塊的部分分成內角、內邊、中塊逐一分析！如下圖所示：

外角	外邊	外邊	外邊	外角
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外邊	內邊	中	內邊	外邊
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外角	外邊	外邊	外邊	外角

圖 27

表 14：五階魔術方塊取二內部組合數與面數變化之分析表

		相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊	外角、外角	×	×	$C_2^8$	+0
角塊+邊塊	外角、外邊	$C_1^8 \times C_1^3$	0	$C_1^8 \times C_1^{33}$	+2
角塊+中塊	外角、內角	×	×	$C_1^8 \times C_1^{24}$	+4
	外角、內邊	×	×	$C_1^8 \times C_1^{24}$	+4
	外角、中	×	×	$C_1^8 \times C_1^6$	+4
邊塊+邊塊	外邊、外邊	$C_1^{12} \times C_1^2$	+2	$C_2^{12} + C_1^{12} \times C_1^{22} + C_2^{24}$	+4
邊塊+中塊	外邊、內角	$C_1^{24} \times C_1^2$	+4	$C_1^{24} \times C_1^{34}$	+6
	外邊、內邊	$C_1^{24} \times C_1^1$	+4	$C_1^{24} \times C_1^{35}$	+6
	外邊、中	×	×	$C_1^{36} \times C_1^6$	+6
中塊+中塊	內角、內角	×	×	$C_2^{24}$	+8
	內角、內邊	$C_1^{24} \times C_1^2$	+6	$C_1^{24} \times C_1^{22}$	+8
	內角、中	×	×	$C_1^{24} \times C_1^6$	+8
	內邊、內邊	×	×	$C_2^{24}$	+8
	內邊、中	$C_1^{24} \times C_1^1$	+6	$C_1^{24} \times C_1^5$	+8
	中、中	×	×	$C_2^6$	+8

將表 14 中，相同的條件情形下，彙整成下表

表 15：五階魔術方塊取二(立體)組合數與面數變化之分析表

	相鄰	面	不相鄰	面
角塊+角塊	×	×	$C_2^8$	0
角塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3$	0	$C_1^8 \times C_1^{33}$	+2
角塊+中塊	×	×	$C_1^8 \times C_1^{24} + C_1^8 \times C_1^6 + C_1^8 \times C_1^{24}$	+4
邊塊+邊塊	$C_1^{12} \times C_1^2$	+2	$C_2^{12} + C_1^{12} \times C_1^{22} + C_2^{24}$	+4
邊塊+中塊	$C_1^{24} \times C_1^2 + C_1^{24} \times C_1^1$	+4	$C_1^{24} \times C_1^{34} + C_1^{36} \times C_1^6 + C_1^{24} \times C_1^{34}$	+6
中塊+中塊	$C_1^{24} \times C_1^1 + C_1^{24} \times C_1^2$	+6	$C_2^{24} + C_1^{24} \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^6 + C_2^{24} + C_1^{24} \times C_1^5 + C_2^6$	+8

問題六：找出五階魔術方塊取三的組合(方法)數與面數的變化

<p>一、五階魔術方塊中，任一層取三個小方塊：</p> <p style="text-align: center;">我們先研究在五階魔術方塊中，任一層任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！</p>	<p>圖 29</p>
---	-------------

因為進入五階之後，方塊數變多了，扣除最外面的一圈方塊數，裡面其實就是一個小小的三階平面，所以，我們再將五階平面做以下的內部分析，綠色代表外角，紫色代表外邊，紅色代表中塊，我們又進而將紅色中塊的部分分成內角、內邊、中塊逐一分析！如下圖所示：

外角	外邊	外邊	外邊	外角
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外邊	內邊	中	內邊	外邊
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外角	外邊	外邊	外邊	外角

圖 27

表 16：五階魔術方塊取三內部組合數與面數變化之分析表

		全相鄰	面	部份相鄰	面	不相鄰	面
角角角	外角+外角+外角	×	×	×	×	$C_3^4$	-6
邊邊邊	外邊+外邊+外邊	$C_1^4 \times C_2^2$	-4	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9$	-2	$C_3^4 + C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_2^6 + C_3^8$	0
中中中	內邊+內邊+內邊	×	×	×	×	$C_3^4$	+6
	內角+內角+內角	×	×	×	×	$C_3^4$	+6
	內角+內角+內邊	$C_1^4 \times C_2^2$	+2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2$	+4	$C_1^4 \times C_2^2$	+6
	內角+內角+中	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^1$	+6
	內邊+內邊+內角	$C_1^4 \times C_2^2$	+2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2$	+4	$C_1^4 \times C_2^2$	+6
	內邊+內邊+中	$C_2^4 \times C_1^1$	+2	×	×	×	×
內角+內邊+中	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	+2	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2$	+4	×	×	
角角邊	外角+外角+外邊	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-6	$C_2^4 \times C_1^8$	-4

角角中	外角+外角+內角	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-2
	外角+外角+內邊	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-2
	外角+外角+中	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^1$	-2
邊邊中	外邊+外邊+內角	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	0	$C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_2^3$	+2
	外邊+外邊+內邊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^3$	0	$C_2^8 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_2^2 \times C_1^2$	+2
	外邊+外邊+中	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	0	$C_2^4 \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^1 + C_1^1 + C_2^8 \times C_1^1$	+2
邊邊角	外邊+外邊+外角	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-6	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	-4	$C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^3 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_2^3$	-2
角中中	外角+內角+內邊	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^4$	0	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^2$	+2
	外角+內角+中	×	×	×	×	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^1$	+2
	外角+內邊+中	×	×	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^1$	0	×	×
	內角+內角+外角	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	+2
	內邊+內邊+外角	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	+2
中中邊	內角+內角+外邊	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	+2	$C_2^4 \times C_1^8$	+4
	內邊+內邊+外邊	×	×	$C_2^4 \times C_1^2$	+2	$C_2^4 \times C_1^{10}$	+4
	外邊+內角+內邊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	+0	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9$	+2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9$	+4
	外邊+內角+中	×	×	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2$	0	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^{10}$	+4
	外邊+內邊+中	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^1$	+0	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^{11}$	+2	×	×
角邊中	外角+外邊+內角	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-4	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^3 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	-2	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3$	0
	外角+外邊+內邊	×	×	$C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2 \times C_1^4$	-2	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^4$	0
	外角+外邊+中	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^4 \times C_1^{10} \times C_1^1$	0

將表 16 中，相同的條件情形下，彙整成下表

表 17：五階魔術方塊取三(任一層)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部份相鄰	面	不相鄰	面
角角角	×	×	×	×	$C_3^4$	-6
邊邊邊	$C_1^4 \times C_2^2$	-4	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9$	-2	$C_3^4 + C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_2^6 + C_3^8$	0
中中中	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_2^2 + C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	+2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2$	+4	$C_3^4 + C_3^4 + C_1^4 \times C_2^2 + C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_2^2$	+6
角角邊	×	×	$C_2^4 \times C_1^4$	-6	$C_2^4 \times C_1^8$	-4
角角中	×	×	×	×	$C_2^4 \times C_1^4 + C_2^4 \times C_1^4 + C_2^4 \times C_1^1$	-2
邊邊角	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-6	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3$	-4	$C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_2^6$	-2
邊邊中	$C_1^4 \times C_2^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^3 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	0	$C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_2^6 + C_2^8 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_2^4 \times C_1^2 + C_2^4 \times C_1^1 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^1 + C_1^4 + C_2^8 \times C_1^1$	+2
中中角	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^1$	+6	$C_2^4 \times C_1^4 + C_2^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^1$	+2
中中邊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^1$	0	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_2^4 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2 + C_1^2 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^{11}$	+2	$C_2^4 \times C_1^8 + C_2^4 \times C_1^{10} + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^{10}$	+4
角邊中	×	×	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^1 \times C_1^2 + C_1^4 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	-2	$C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^3 + C_1^4 \times C_1^6 \times C_1^4 + C_1^4 \times C_1^{10} \times C_1^1$	0

二、五階魔術方塊取三(立體)：

我們再研究在五階魔術方塊立體的狀況下，任取三個小方塊有幾種組合數。以下區分為相鄰、部分相鄰與不相鄰三種狀況討論！

註：此取法以最外面一層為主

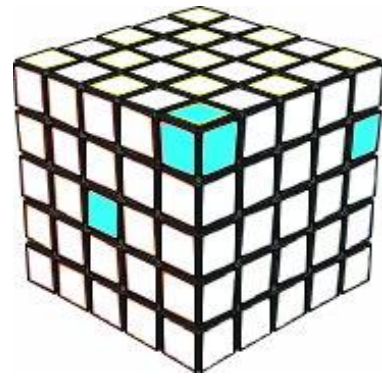


圖 30

因為進入五階之後，方塊數變多了，扣除最外面的一圈方塊數，裡面其實就是一個小小的三階平面，所以，我們再將五階平面做以下的內部分析，綠色代表外角，紫色代表外邊，紅色代表中塊，我們又進而將紅色中塊的部分分成內角、內邊、中塊逐一分析！如下圖所示：

外角	外邊	外邊	外邊	外角
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外邊	內邊	中	內邊	外邊
外邊	內角	內邊	內角	外邊
外角	外邊	外邊	外邊	外角

圖 27

表 18：五階魔術方塊取三內部組合數與面數變化之分析表

		全相鄰	面	部份相鄰	面	不相鄰	面
角角角	外角+外角+外角	×	×	×	×	$C_3^8$	0
邊邊邊	外邊+外邊+外邊	$C_1^{12} \times C_2^2$	+2	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{33}$	+4	$C_3^{12} + C_2^{12} C_1^{20} + C_1^{12} \times C_2^{22} + C_3^{24}$	+6
中中中	內邊+內邊+內邊	×	×	×	×	$C_3^{24}$	+12
	內角+內角+內角	×	×	×	×	$C_3^{24}$	+12
	中+中+中	×	×	×	×	$C_3^6$	+12
	內角+內角+內邊	$C_1^{24} \times C_2^2$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22}$	+10	$C_1^{24} \times C_2^{22}$	+12
	內角+內角+中	×	×	×	×	$C_2^{24} \times C_1^6$	+12
	內邊+內邊+內角	$C_1^{24} \times C_2^2$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22}$	+10	$C_1^{24} \times C_2^{22}$	+12
	內邊+內邊+中	$C_1^6 \times C_2^4$	+8	$C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^{20}$	+10	$C_1^6 \times C_2^{20}$	+12
	中+中+內角	×	×	×	×	$C_2^6 \times C_1^{24}$	+12
中+中+內邊	×	×	$C_2^6 \times C_1^8$	+10	$C_2^6 \times C_1^{16}$	+12	



	內角+內邊+中	$C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^2$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^5 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^{22}$	+10	$C_1^6 \times C_1^{20} \times C_1^{22}$	+12
角角邊	外角+外角+外邊	×	×	$C_2^8 \times C_1^6$	0	$C_2^8 \times C_1^{30}$	+2
角角中	外角+外角+內角	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^{24}$	+4
	外角+外角+內邊	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^{24}$	+4
	外角+外角+中	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^6$	+4
邊邊角	外邊+外邊+外角	$C_2^8 \times C_2^3 + C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^1$	+0	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{32} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^7$	+2	$C_2^{12} \times C_1^8 + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^7 + C_1^8 \times C_2^{21}$	+4
邊邊中	外邊+外邊+內角	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^2$	+4	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{33} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22}$	+6	$C_2^{12} \times C_1^{24} + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^{24} + C_2^{22}$	+8
	外邊+外邊+內邊	$C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^2$	+4	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^{33}$	+6	$C_2^{24} \times C_1^{24} + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^{24} + C_2^{11}$	+8
	外邊+外邊+中	×	×	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^6$	+6	$C_2^{12} \times C_1^6 + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^6 + C_2^6$	+8
中中角	內角+內角+外角	×	×	×	×	$C_2^{24} \times C_1^8$	+8
	內邊+內邊+外角	×	×	×	×	$C_2^{24} \times C_1^8$	+8
	中+中+外角	×	×	×	×	$C_2^6 \times C_1^8$	+8
	外角+內角+內邊	×	×	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^8$	+6	$C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^{22}$	+8
	外角+內角+中	×	×	×	×	$C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^6$	+8
	外角+內邊+中	×	×	$C_1^8 \times C_1^6 \times C_1^4$	+6	$C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^5$	+8
中中邊	內角+內角+外邊	$C_1^{24} \times C_2^2$	+6	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22}$	+8	$C_1^{12} \times C_2^{24} + C_1^{24} \times C_2^{22}$	+10
	內邊+內邊+外邊	$C_1^{12} \times C_2^2$	+6	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22}$	+8	$C_1^{12} \times C_2^{22} + C_1^{24} \times C_2^{24}$	+10
	中+中+外邊	×	×	×	×	$C_2^6 \times C_1^{36}$	+10
	外邊+內角+內邊	$C_1^{36} \times C_1^2 \times C_1^2$	+6	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{22} \times C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{33} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^{22}$	+8	$C_1^{24} \times C_1^{22} \times C_1^{33}$	+10
	外邊+內角+中	×	×	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^6$	+8	$C_1^6 \times C_1^{24} \times C_1^{34}$	+10
	外邊+內邊+中	$C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^1$	+6	$C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^5 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^{35}$	+8	$C_1^6 \times C_1^{20} \times C_1^{35}$	+10

角邊中	外角+外邊+內角	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^2$	+2	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^7$	+4	$C_1^8 \times C_1^{12} \times C_1^{24} + C_1^8 \times C_1^{21} \times C_1^{22}$	+6
	外角+外邊+內邊	×	×	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{24} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^8$	+4	$C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^{32}$	+6
	外角+外邊+中	×	×	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^6$	+4	$C_1^8 \times C_1^{33} \times C_1^6$	+6

將表 16 中，相同的條件情形下，彙整成下表

表 19：五階魔術方塊取三(立體)組合數與面數變化之分析表

	全相鄰	面	部份相鄰	面	不相鄰	面
角角角	×	×	×	×	$C_3^8$	0
邊邊邊	$C_1^{12} \times C_2^2$	+2	$C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{33}$	+4	$C_3^{12} + C_2^{12} \times C_1^{20} + C_1^{12} \times C_2^{22} + C_3^{24}$	+6
角角中	×	×	×	×	$C_2^8 \times C_1^{24} + C_2^8 \times C_1^{24} + C_2^8 \times C_1^6$	+4
邊邊角	$C_1^8 \times C_2^3 + C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^1$	0	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{32} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^7$	+2	$C_2^{12} \times C_1^8 + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^7 + C_1^8 \times C_2^{21}$	+4
邊邊中	$C_1^{12} \times C_2^2 \times C_1^2 + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^2$	+4	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{33} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^{22} + C_1^{33} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^6$	+6	$C_2^{12} \times C_1^{24} + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_2^{22} + C_2^{24} \times C_1^{24} + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_2^{11} + C_2^{12} \times C_1^6 + C_1^{12} \times C_1^{22} \times C_1^6 + C_2^{24} \times C_1^6$	+8
中中角	×	×	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^8 + C_1^8 \times C_1^6 \times C_1^4$	+6	$C_2^{24} \times C_1^8 + C_2^6 \times C_1^8 + C_2^{24} \times C_1^8 + C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^{22} + C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^6 + C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^5$	+8
中中邊	$C_1^{24} \times C_2^2 + C_1^{12} \times C_2^2 + C_1^{36} \times C_1^2 \times C_1^2 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^1$	+6	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{12} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{33} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^6 + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^5 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^{35}$	+8	$C_1^{12} \times C_2^{24} + C_1^{24} \times C_2^{22} + C_1^{12} \times C_2^{22} + C_1^{24} \times C_2^{24} + C_2^6 \times C_1^{36} + C_1^{24} \times C_1^{22} \times C_1^{33} + C_1^6 \times C_1^{24} \times C_1^{34} + C_1^6 \times C_1^{20} \times C_1^{35}$	+10
角邊中	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^2$	+2	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^7 + C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^6 + C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^{24} + C_1^{24} \times C_1^1 \times C_1^8$	+4	$C_1^8 \times C_1^{12} \times C_1^{24} + C_1^8 \times C_1^{21} \times C_1^{22} + C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^{32} \times C_1^8 \times C_1^{24} \times C_1^{32} + C_1^8 \times C_1^{33} \times C_1^6$	+6

角角邊	×	×	$C_2^8 \times C_1^6$	+2	$C_2^8 \times C_1^{30}$	+2
中中中	$C_1^{24} \times C_2^2 + C_1^{24} \times C_2^2 + C_1^6 \times C_2^4 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^2$	+8	$C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^{24} \times C_1^2 \times C_1^{22} + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^2 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^2 + C_1^2 \times C_1^5 + C_1^6 \times C_1^4 \times C_1^{22}$	+10	$C_3^{24} + C_3^{24} + C_3^6 + C_1^{24} \times C_1^{22} + C_2^{24} \times C_1^6 + C_1^{24} \times C_2^{22} + C_1^6 \times C_2^{20} + C_2^6 \times C_1^{24} + C_2^6 \times C_1^{16} + C_1^6 \times C_1^{20} \times C_1^{22}$	+12

## 陸、結論

- (一)在三階魔術方塊任取二塊，在兩方塊不相鄰的狀況下發現面數的變化量是中塊 > 邊塊 > 角塊，而且都是取中塊會比取邊塊多 2 個面，取邊塊又會比取角塊多 2 個面！
- (二)選擇中塊會多出較多可以利用的面！
- (三)如果選取的方塊皆為角塊時，其組合數不會有全相鄰或是部分相鄰的情況發生。
- (四)角塊和中塊永遠不可能相鄰，所以在計算組合數與面數時，直接計算不相鄰的部分即可。
- (五)N 階魔術方塊任取 2 方塊之組合數（任一層），如下表

表 20

	相鄰	不相鄰
角塊 + 角塊	無此組合	$C_2^4$
角塊 + 邊塊	$C_1^4 \times C_1^2$	$C_1^4 \times C_1^{(N-2) \times 4 - 2}$
角塊 + 中塊	無此組合	$C_1^4 \times C_1^{(N-2)^2}$
邊塊 + 邊塊	$(N-2-1) \times 4$	
邊塊 + 中塊	$C_1^{(N-2) \times 4} \times C_1^1$	$C_1^{(N-2) \times 4} \times C_1^{(N-2)^2 - 1}$

(六)N 階魔術方塊任取 2 方塊之組合數(立體) , 如下表

表 21

	相鄰	不相鄰
角塊+角塊	無此組合	$C_2^8$
角塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3$	$C_1^8 \times C_1^{(N-2) \times 4 - 3}$
角塊+中塊	無此組合	$C_1^8 \times C_1^{(N-2)^2 \times 6}$
邊塊+邊塊	$(N-2-1) \times 12$	
邊塊+中塊	$C_1^{(N-2) \times 4} \times C_1^2$	$C_1^{(N-2) \times 12} \times C_1^{(N-2)^2 \times 6 - 2}$

(七)N 階魔術方塊任取 3 方塊之組合數(任一層) , 如下表

表 22

	相鄰	不相鄰
角塊+角塊+角塊	無此組合	$C_3^4$
邊塊+邊塊+邊塊	$(N-2-2) \times 4$	
角塊+角塊+中塊	無此組合	
邊塊+邊塊+角塊	$C_1^4 \times C_1^2 \times C_1^1$	
邊塊+邊塊+中塊	$(N-2-1) \times 12 \times C_1^2$	

(八)N 階魔術方塊任取 3 方塊之組合數(立體) , 如下表

表 23

	相鄰	不相鄰
角塊+角塊+角塊	無此組合	$C_3^8$
邊塊+邊塊+邊塊	$(N-2-2) \times 12$	
角塊+角塊+中塊	無此組合	
中塊+中塊+角塊	無此組合	
角塊+中塊+邊塊	$C_1^8 \times C_1^3 \times C_1^2$	

(九)方塊取走後，面數的變化之分析

1、同時取走角塊、角塊或是同時取走角塊、中塊時，面數的變化互不影響，

因為這些方塊永遠不可能相鄰。

2、五階以上，任意取兩個方塊或是三個方塊，其面數的變化量都是固定的。

整理成下列表格：

表 24：N ( $N \geq 5$ ) 階魔術方塊任取二方塊(任一層)面數變化量增減表

	相鄰	不相鄰
角塊+角塊	×	-4
角塊+邊塊	-4	-2
角塊+中塊	×	0
邊塊+邊塊	-2	0
邊塊+中塊	0	+2
中塊+中塊	+2	+4

表 25：N ( $N \geq 5$ ) 階魔術方塊任取二方塊(立體)面數變化量增減表

	相鄰	不相鄰
角塊+角塊	×	0
角塊+邊塊	0	+2
角塊+中塊	×	+4
邊塊+邊塊	+2	+4
邊塊+中塊	+4	+6
中塊+中塊	+6	+8

表 26：N (N≥5) 階魔術方塊任取三方塊(任一層)面數變化量增減表

	全相鄰	部份相鄰	不相鄰
角角角	×	×	-6
角角邊	×	-6	-4
角角中	×	×	-2
邊邊角	-6	-4	-2
邊邊邊	-4	-2	0
邊邊中	-2	0	+2
中中角	×	+6	+2
中中邊	0	+2	+4
中中中	+2	+4	+6
角邊中	×	-2	0

表 27：N (N≥5) 階魔術方塊任取三方塊(立體)面數變化量增減表

	全相鄰	部份相鄰	不相鄰
角角角	×	×	0
角角邊	×	+2	+2
角角中	×	×	+4
邊邊角	0	+2	+4
邊邊邊	+2	+4	+6
邊邊中	+4	+6	+8
中中角	×	+6	+8
中中邊	+6	+8	+10
中中中	+8	+10	+12
角邊中	+2	+4	+6



## 柒、心得與感想

很高興可以加入數學這個團隊，在將近一年的研究過程中，我們學會了如何發現問題、解決問題、驗證答案。又在過程中，我們也常常會遇到很多的瓶頸，但為了突破瓶頸，我們更學會如何尋求新的數學知識來解決遇到的困境，每當解出問題答案的那一瞬間，我的心就雀躍不已，那片刻的興奮難以言喻，而我們真的很享受這種解題的快感！

在過去的這一年，很感謝我的數學團隊好夥伴，雖然我們有時會因為意見不同而起爭執，但也有時卻為了尋求問題的解答而錯過了用餐時間，無形之中培養了彼此之間的最佳默契，此次數學探究之旅，感謝一路上有你的陪伴與鼓勵。

我們這次研究的主題是「城市魔方」，它不但可以利用不同的面與色塊設計出與眾不同風格的建築物，在生活當中我們也發現有許多相關的建築物，如圖 31、圖 32、圖 33、圖 34，正好與我們的研究相呼應。



圖 31 (台北市信義區的春光公園)  
翻拍三立新聞網公共藝術



圖 32 (高雄四維國小公車站)  
翻拍 ETtoday 新聞雲



圖 33 (台中廣三 SOGO)  
翻拍台中觀光旅遊網



圖 34 (鹿特丹，方塊屋)  
翻拍 Little Bear's Blog

我們的研究結果可以提供廠商作為參考：

- (一) 廠商在造景時，若因材料成本的考量，可以變換其中的幾個面的材質或是少幾個方塊，就會有不一樣的新面貌。
- (二) 色彩繽紛的幾何圖形，就像正在翻轉中的魔術方塊，只要任選幾塊，變化其顏色，也可以呈現變化多端的視覺效果。
- (三) 取走某些方塊後，可以做成兒童的書架、或是遊樂場、迷宮。



圖 35 (兒童的夢想樂園)  
翻拍 grimshaw 建築事務所

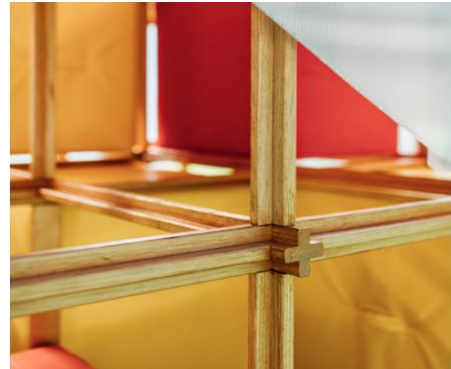


圖 36 (兒童的夢想樂園)  
翻拍 grimshaw 建築事務所

## 捌、參考資料

- 康軒出版社(2017)。國小數學第十二冊 第三單元 柱體、面、邊的關係與體積
- 龍騰出版社(2007)。高中數學第四冊 第二章 排列、組合