花蓮縣第 60 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：翻轉金字塔

關 鍵 詞： 三角形、翻轉

編　號：

作品名稱：翻轉金字塔

摘要

本研究是個簡單也有趣的圖形遊戲，運用硬幣排成三角形，透過移動硬幣，讓三角形翻轉，然而移動硬幣時一定會有最少的數量，不同層數的三角形所需要移動的最少數量也會不同，透過實際操作、記錄、推論，嘗試導出數學公式，並加以驗證最少的硬幣數量是否正確。

壹、 研究動機

在一次偶然的因緣際會下，我們被老師問到了一個數學題目，用硬幣排出三角形，並嘗試移動硬幣，看如何以最少的數量，讓三角形翻轉，一開始滿簡單，等硬幣數量開始增加，三角形也越來越多層之後，就感覺有些挑戰，嘗試解了幾題後，就想要多了解這個遊戲，並希望可以繼續解開有關這個題目的所有問題，找出解題的方法，因此我們找老師來研究翻轉金字塔，我們研究這個是想要（一）了解與尋找翻轉金字塔遊戲的規律（二）嘗試破解遊戲的方式（三）運用所學過的四則運算，嘗試找出相對應的數學公式，計算出移動最少硬幣的個數，所以如果我們要完成這些目標，就要試著把數學公式導出來，才能解決。

貳、研究目的

一、了解與尋找翻轉金字塔遊戲的規律

二、嘗試破解遊戲的方式

三、找出相對應的數學公式，計算出移動最少硬幣的個數

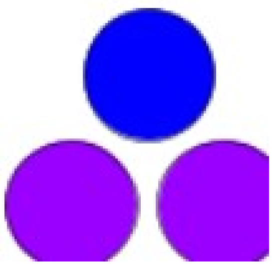
參、研究設備及器材

項目	數量	項目	數量	項目	數量
一元硬幣	1 包	白板	1 個	磁鐵	1 包

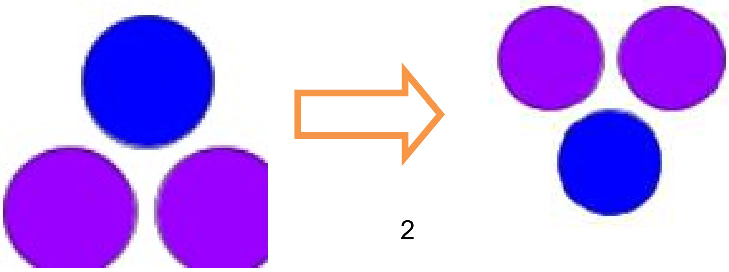
肆、研究過程或方法

一、遊戲規則:

(一)先用三個硬幣排出二層的正三角形。
(第一層一個，第二層兩個，如右圖)

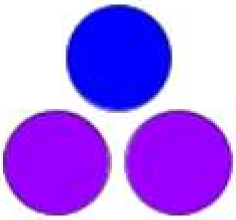


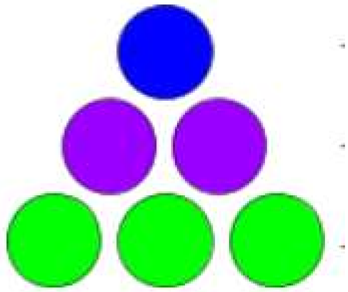
(二)試著移動硬幣讓三角形倒過來，如:



(三)試著移動最少的硬幣讓三角形倒過來。

(四)每完成一層後可再增加一層進行遊戲(三層三角形解完就增加一層為四層的三角形)。





(五)再嘗試找出移動最少硬幣的方式。

(六)依此類推繼續進行遊戲。

二、研究過程

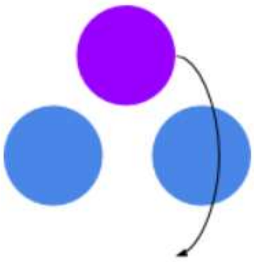
(一)實際進行遊戲與記錄圖表

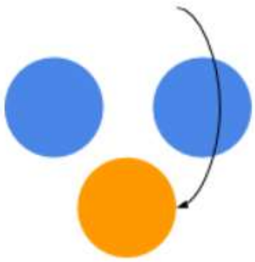
紫圈：硬幣移動前位置

藍球：不移動的硬幣

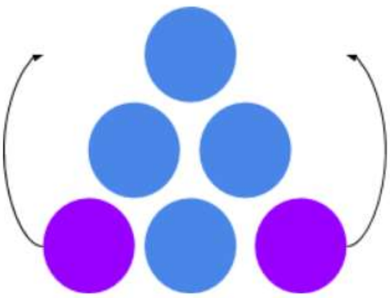
黃球：硬幣移動後位置

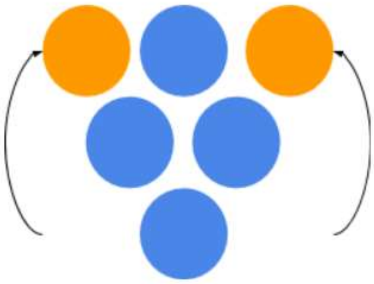
- 兩層三角形



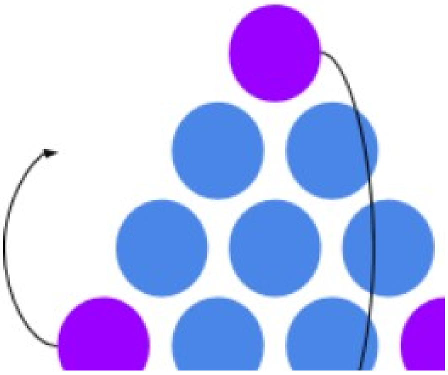


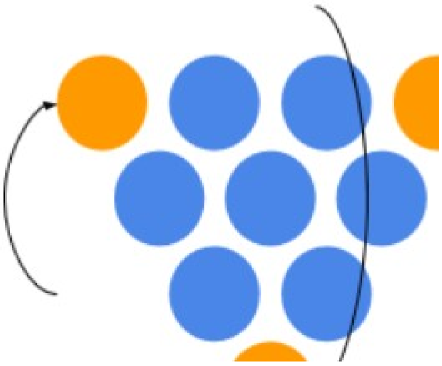
- 三層三角形



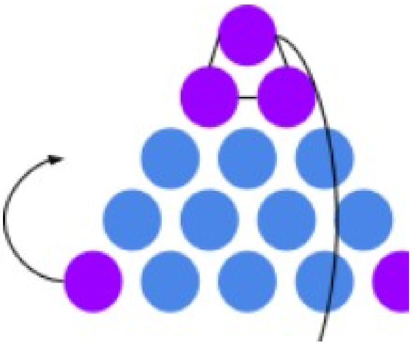


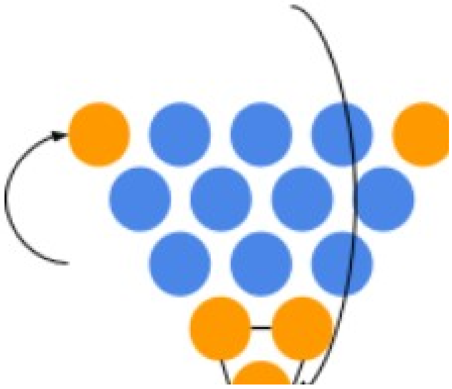
- 四層三角形





- 五層三角形





(二)歸納記錄成表格

組別	三角形層數	總顆數		比之前增加(移動顆數)
第一組	2	3	1	+1
	3	6	2	+1
	4	10	3	+1
第二組	5	15	5	+2
	6	21	7	+2
	7	28	9	+2
第三組	8	36	12	+3
	9	45	15	+3
	10	55	18	+3
第四組	11	66	22	+4
	12	78	26	+4
	13	91	30	+4

第五組	14	105	35	+5
	15	120	40	+5
	16	136	45	+5

(三)尋找規律性

1.我們發現 2 層、3 層、4 層的三角形，移動所增加的硬幣數都是 1 個，統計後發現，每 3 層移動硬幣所增加的數量也都是一樣的。

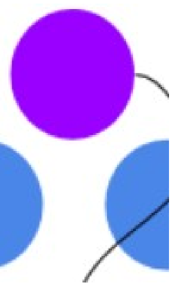
2.我們發現增加的移動硬幣數量是每三層為一組，第一組(2 層、3 層、4 層的三角形)都會比前一層移動硬幣的個數增加 1 個，第二組(5 層、6 層、7 層的三角形)都會比前一層移動硬幣的個數增加 2 個，第三組(8 層、9 層、10 層的三角形)都會比前一層移動硬幣的個數增加 3 個...，以此類推。

3.在實際操作時，我們發現三角形在移動硬幣時，想要移動最少的移動數，都是由三角形的三個角來進行移動和變換、增加得。

4.在移動的時候，我們發現會有 3 種模式，第一種是 1 個角增加移動量的模式，第二種是 2 個角增加移動量的模式，第 3 種是 3 個角增加移動量的模式。

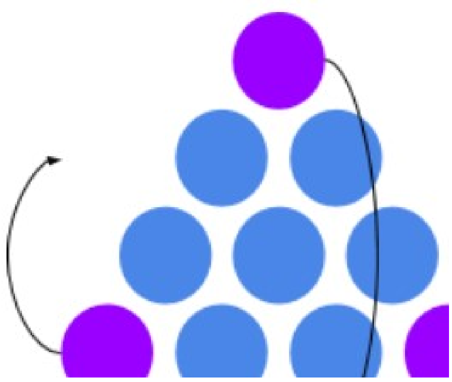
5.每個角移動時，三角形層數越多，移動的角所移動硬幣個數也越多，角移動時也會用三角形的方式移動。

6.每一組的第一層都是把增加的硬幣數放在 1 個角(如右圖)



下一層會有 2 個角都增加(如右圖)

在下一層時，3 個角都增加(如右圖)



(四)推論數學公式

1. 找規律性的時候，我們發現有要將三角形翻轉，有 3 種移動的模式，所以我們把層數除以 3，看看有甚麼狀況。我們設定 A=層數，並用前兩組來做計算，將計算結果記錄下來，如下表：

<table>
<tr><td colspan="2">計算的公式</td><td>A÷3</td><td rowspan="2">討論算式</td></tr>
<tr><td colspan="2">三角形層數</td><td>計算結果</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第一組</td><td>2 層</td><td>2÷3=0...2</td><td rowspan="6">對於算式中的餘數，我們覺得可以認為不同數字代表移動的 3 種模式。
算式中的商，我們看不出跟我們的推論中有什麼相關，而且同一組中有不同的商，讓我們有些傷腦筋。</td></tr>
<tr><td>3 層</td><td>3÷3=1...0</td></tr>
<tr><td>4 層</td><td>4÷3=1...1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二組</td><td>5 層</td><td>5÷3=1...2</td></tr>
<tr><td>6 層</td><td>6÷3=2...0</td></tr>
<tr><td>7 層</td><td>7÷3=2...1</td></tr>
</table>

2.在思考的過程中，我們嘗試把層數(A)加 1，在用剛剛的算式與組別再算算看，得到的計算結果一樣用表格記錄下來，如下表：

<table>
<tr><td colspan="2">計算的公式</td><td>(A+1)÷3</td><td rowspan="2">討論算式</td></tr>
<tr><td colspan="2">三角形層數</td><td>計算結果</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第一組</td><td>2 層</td><td>(2+1)÷3=1...0</td><td rowspan="6">對於餘數，我們一樣覺得可以認為不同數字代表移動的 3 種模式，而且有規律：
餘數 C 為 0 代表 1 個角增加的模式。
餘數 C 為 1 代表 2 個角增加的模式。
餘數 C 為 2 代表 3 個角增加的模式。
對於商，商是角最高移動層數，也就是 C+1 個角數所要移動的層數，假如商是 1，就表示 C+1 個角數所要增加移動的第 1 層，而假如商是 2，就表示 C+1 個角除了原本的第一層之外，還要增加移動的第二層，依此類推。</td></tr>
<tr><td>3 層</td><td>(3+1)÷3=1...1</td></tr>
<tr><td>4 層</td><td>(4+1)÷3=1...2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二組</td><td>5 層</td><td>(5+1)÷3=2...0</td></tr>
<tr><td>6 層</td><td>(6+1)÷3=2...1</td></tr>
<tr><td>7 層</td><td>(7+1)÷3=2...2</td></tr>
</table>

3.透過上面的表格與推論的結果，我們把 B 定為商，而 C 定為餘數，進而推導出的公式為(A+1)÷3=B...C。這個算式能推論出不同層(A)的三角形移動的模式(C)，還有移動的角所增加的量(B)。

4.在討論的過程中，我們發現角增加的量與所增加的第幾層一樣，例如 7 層的三角形，依照公式(A+1)÷3=B...C 可得到(7+1) ÷3=2…2，所以 B=2、C=2，C=2 代表移動的三個角都要增加，B=2 代表 C+1 個角數要增加 2 個移動的硬幣，也就是移動的角要增加一動第 2 層的硬幣。

5.在計算三角形硬幣的總數，我們一開始用加的，三角形 2 層有 3 顆，而 3 層為 2 層的量+第 3 層的量=3+3=6，4 層為 3 層的量+第 4 層增加的量=6+4=10 也就是 1+2+3+4=10 若 10 層則總數顆數為 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55，但是層數如果越多，一層一層加會愈來愈麻煩，所以我們試著找計算的方式，我們用 10 層的三角形來計算。

假如 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=W$(算式一)，則 $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=W$(算式二)，把算式一與算式二的每一項加在一起(算式一的第一項與算式二的第一項相加，以此類推)就會得到 $11+11+11+11+11+11+11+11+11+11=2W$，就是 $11\times10=2W$，也就是 $11\times10\div2=W=55$，用表格排列後來說明如下表:

項數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	總和
算式一	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	6 +	7 +	8 +	9 +	10	=W
算式二	10 +	9 +	8 +	7 +	6 +	5 +	4 +	3 +	2 +	1	=W
兩個算式同項相加	11 +	11 +	11 +	11 +	11 +	11 +	11 +	11 +	11 +	11	=2W
11x10=2W　11x10÷2=W=55											

所以我們發現 $11\times10=2W$ 中，11 為第 1 項與最後 1 項數字的和(1+10)，10 為共有幾項(項數)，項數剛好等於最後一項的數字，10 層的三角形共需要 55 個硬幣，也就是說 $A=10$ 時，第一層為 1 個硬幣，第 10 層為 10 個硬幣，第 A 層為 A 個硬幣，按照剛剛的算法 $(1+10)\times10\div2$ 轉換後可以得公式 $(1+A)\times A\div2=(A+1)\times A\div2$=硬幣總數，嘗試計算後，結果如下表。

<table>
<tr><td colspan="2">計算的公式</td><td>(A+1)xA÷2</td><td rowspan="2">討論算式</td></tr>
<tr><td colspan="2">三角形層數</td><td>數量(W)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第一組</td><td>2 層</td><td>(2+1)x2÷2=3</td><td rowspan="6">我們原本的算法，如果以 2 層為例，算式是第一層的 1 個+第二層的 2 個，也就是 1+2=3。只需要把第一個數字加上第二個數字即可。

但如果是 3 層，算式是第一層的 1 個+第二層的 2 個+第三層的 3 個，就不會是 1+3，而是 1+2+3=6。

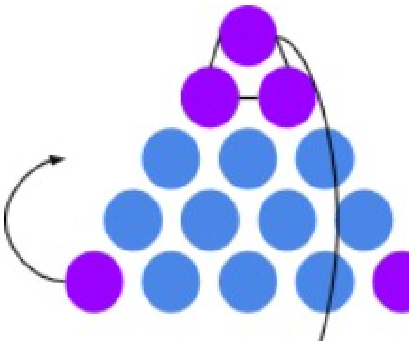
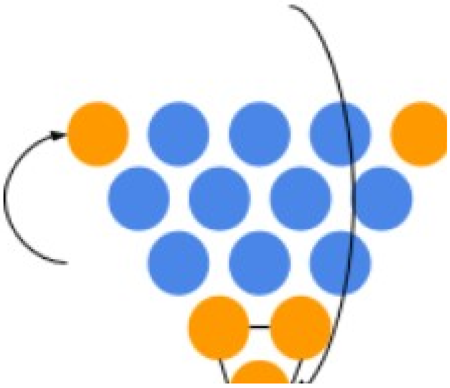
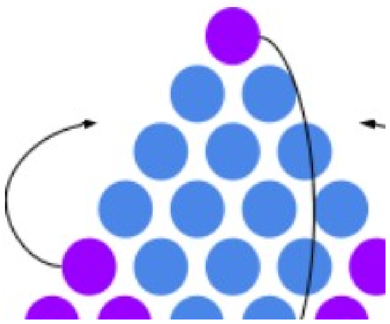
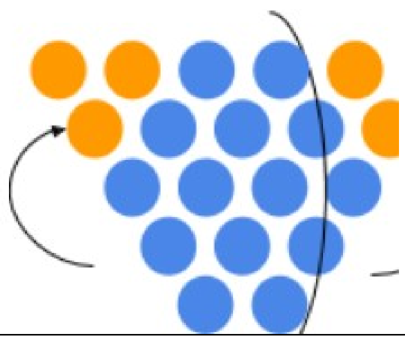
但是隨著層數越多，硬幣數量越多，我們就越不好計算，所以我們用上面推論出的算式來計算，我們將總顆數設為 W，再將不同層數的三角形加以計算得到總顆數。

補充說明(10 層為例)

由以上表格可知，當 1+10、2+9、3+8...每一組加起來都等於 11，也就是最後一項數字+1，算式是 A+1，但 A+1 只有 1 組，所以以 10 這個數字時，A+1 要 x10，而是就是 A，所以算式是(A+1)xA，但(A+1)xA

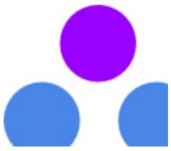
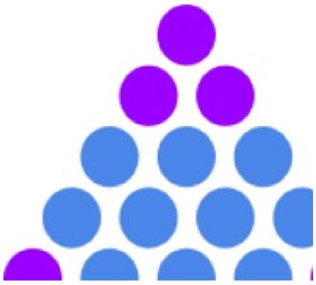
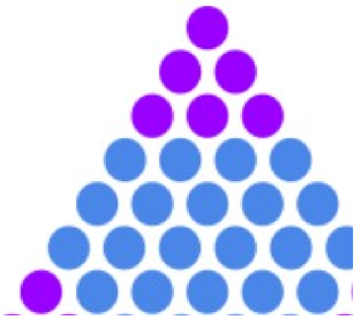
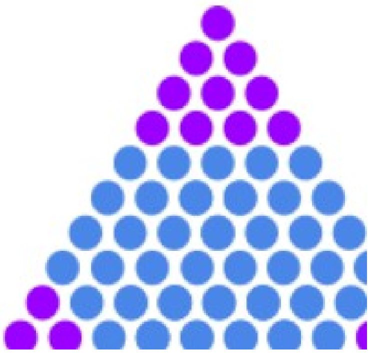
=2W，而在將算出的結果÷2，就是 W，算式為(A+1)xA÷2，也就是該層數的顆數。</td></tr>
<tr><td>3 層</td><td>(3+1)x3÷2=6</td></tr>
<tr><td>4 層</td><td>(4+1)x4÷2=10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二組</td><td>5 層</td><td>(5+1)x5÷2=15</td></tr>
<tr><td>6 層</td><td>(6+1)x6÷2=21</td></tr>
<tr><td>7 層</td><td>(7+1)x7÷2=28</td></tr>
</table>

6.我們移動 5、6 層的三角形時，發現的情形並記錄下來。

移動的圖示	說明與推論
 	我們在移動五層的三角形時，我們發現： ➢ 三個角都要移動 ➢ 其中 1 個角要移動兩層 ➢ 而另外兩個角移動一層 ➢ 依照(A+1)÷3=B…C 可得(5+1) ÷3=2…0 ➢ C=0 代表 1 個角要增加 ➢ B=2 代表有 1 個角要增加移動 2 個硬幣 由 C 可知其中有一個角要增加移動的量，增加的量為 B，也就是移動的角第二層的 2 個硬幣，B=2 代表已經要多移動到第二層，所以每個角的第一層都已經移動到了，也就是三角形的三個角都要移動。 所以總和結果 三個角第一層都要移動，其中有一個角要多一動第二層。
 	我們在移動六層的三角形時，我們發現： ➢ 三個角都要移動 ➢ 其中 2 個角要移動兩層 ➢ 而另外 1 個角移動一層 ➢ 依照(A+1)÷3=B…C 可得(6+1) ÷3=2…1 ➢ C=1 代表 2 個角要增加 ➢ B=2 代表有 2 個角要增加移動 2 個硬幣 ➢ 由 C 可知其中有二個角要增加移動的量，增加的量為 B，也就是移動的角第二層的 2 個硬幣，B=2 代表已經要多移動到第二層，所以每個角的第一層都已經移動到了，也就是三角形的三個角都要移動。 所以總和結果 三個角第一層都要移動，其中有二個角要多一動第二層。

7. 當開始思考要如何計算移動的數量，我們有個想法，就是把三個角移動的基本量先找出來，再把增加的量加上去，是不是就能達成?透過上面的討論，我們發現當

B=2 時，每個角的第一層都會已經移動，當 B=3 時，每個角都會已經移動二層，這時我們發現當 B 被計算出來之後，每個角已經被移動層數當好都為 B-1，為了確認我們的想法，我們把每一組挑一個三角形來研究，並製作表個如下:

組別	層數	帶入 (A+1)÷3=B...C 所得 B、C 值	三角形移動角的圖形	討論
1	2	(2+1)÷3=1...0 B=1　C=0		B-1=1-1=0 三個角共同移動層數為 0 層 C+1 個角增加 B 個硬幣 0+1 個角增加 1 個硬幣
2	5	(5+1)÷3=2...0 B=2　C=0		B-1=2-1=1 三個角共同移動層數為 1 層 C+1 個角增加 B 個硬幣 0+1 個角增加 2 個硬幣
3	8	(8+1)÷3=3...0 B=3　C=0		B-1=3-1=2 三個角共同移動層數為 2 層 C+1 個角增加 B 個硬幣 0+1 個角增加 3 個硬幣
4	11	(11+1)÷3=4...0 B=4　C=0		B-1=4-1=3 三個角共同移動層數為 3 層 C+1 個角增加 B 個硬幣 0+1 個角增加 4 個硬幣

如果每個角的 B-1 層都被移動，那我們帶入先前層數總量的公式時，能算出每個角已經移動的基本量，先前的公式是(A+1)xA÷2，把 A 用 B-1 取代後，就能得到 1 個角的基本量公式為　(B-1+1)x(B-1)÷2，因為總共有 3 個角的基本量，所以要把 1 個角的基本量公式 x3，得到　(B-1+1)x(B-1)÷2 x3，接下來在把增加的量加上去就完

成，大家透過表格與記錄推論出「C+1 個角增加 B 個硬幣」，轉化成算式就是(C+1) xB，把討論與推論出來的公式整理過後，我們得到新的公式(B-1+1)x(B-1)÷2x3+B×(C+1)，把前兩組的三角形計算一下，看看是否有符合我們自己畫圖出來的數據，記錄如下表：

計算的公式		(A+1)÷3=B⋯C	(B-1+1)x(B-1)÷2x3+B×(C+1)	畫圖後數出來的移動硬幣數量
三角形層數		計算結果	計算結果	
第一組	2 層	(2+1)÷3=1...0	(1-1+1)x(1-1)÷2x3+1×(0+1)=1	1
	3 層	(3+1)÷3=1...1	(1-1+1)x(1-1)÷2x3+1×(1+1)=2	2
	4 層	(4+1)÷3=1...2	(1-1+1)x(1-1)÷2x3+1×(2+1)=3	3
第二組	5 層	(5+1)÷3=2...0	(2-1+1)x(2-1)÷2x3+2×(0+1)=5	5
	6 層	(6+1)÷3=2...1	(2-1+1)x(2-1)÷2x3+2×(1+1)=7	7
	7 層	(7+1)÷3=2...2	(2-1+1)x(2-1)÷2x3+2×(2+1)=9	9

根據計算出來的結果，與我們畫圖所得到的結果是一樣的，大家在看算式時，發現還可以在整理過，有部分可以先計算處理，最後我們得到的公式為 Bx(B-1)÷2x3+B×(C+1)。

(五)驗證公式

就公式帶入 5 組的計算，並將結果與自己畫圖所得情況做比較，看是否符合

計算的公式		(A+1)÷3=B⋯C	Bx(B-1)÷2x3+B×(C+1)	畫圖後數出來的移動硬幣數量
三角形層數		計算結果	計算結果	
第一組	2 層	(2+1)÷3=1...0	1x(1-1)÷2x3+1×(0+1)=1	1
	3 層	(3+1)÷3=1...1	1x(1-1)÷2x3+1×(1+1)=2	2
	4 層	(4+1)÷3=1...2	1x(1-1)÷2x3+1×(2+1)=3	3
第二組	5 層	(5+1)÷3=2...0	2x(2-1)÷2x3+2×(0+1)=5	5
	6 層	(6+1)÷3=2...1	2x(2-1)÷2x3+2×(1+1)=7	7
	7 層	(7+1)÷3=2...2	2x(2-1)÷2x3+2×(2+1)=9	9
第三組	8 層	(8+1)÷3=3...0	3x(3-1)÷2x3+3×(0+1)=12	12
	9 層	(9+1)÷3=3...1	3x(3-1)÷2x3+3×(1+1)=15	15
	10 層	(10+1)÷3=3...2	3x(3-1)÷2x3+3×(2+1)=18	18
第四組	11 層	(11+1)÷3=4...0	4x(4-1)÷2x3+4×(0+1)=22	22
	12 層	(12+1)÷3=4...1	4x(4-1)÷2x3+4×(1+1)=26	26
	13 層	(13+1)÷3=4...2	4x(4-1)÷2x3+4×(2+1)=30	30
第五組	14 層	(14+1)÷3=5...0	5x(5-1)÷2x3+5×(0+1)=35	35
	15 層	(15+1)÷3=5...1	5x(5-1)÷2x3+5×(1+1)=40	40
	16 層	(16+1)÷3=5...2	5x(5-1)÷2x3+5×(2+1)=45	45

根據計算結果，完全符合我們透過圖形所算出來的數量。

伍、研究結果

經過我們的研究後，我們發現:

一、.它移動的方式和位置有一定的規律性。

二、如果要找出最少硬幣的移動數量，移動的位置一定從三角形的三個角來移動。

三、由 2 層硬幣構成的三角形開始，每三層三角形增加的量會相同，我們把這三成三角形歸類在同一組，也就是 2 層、3 層、4 層的三角形會在同一組。

四、三角形移動硬幣增加的量、增加的位置也有規律性，是先增加在 1 個的角，再來是增加在兩個角，最後是三個角一起增加。

五、透過觀察每一組三角形的圖形，我們推論出第一個公式：(A+1)÷3=B⋯C，其中 A 為三角形的硬幣使用層數，B 為移動硬幣時移動角要增加的量，B 也為移動角增加的層數，如 B=2 時，代表移動的角要增加移動 2 個硬幣，也剛好是要增加移動第二層，C 為移動硬幣時，有幾個角要增加移動的量。

六、為了計算三角形硬幣使用的總數，我們透過討論，得到第二個公式(A+1)xA÷2，帶入三角形層數(A)，就可以算出要排 A 層三角形所需要的硬幣總數。

七、在思考如何計算移動硬幣最少數量時，我們討論出一個概念，就是先找出三個移動角所需要移動的基本硬幣數量，再把增加的硬幣數量加上去，透過一系列的討論與計算，我們得到一個另人開心的結果，大家一起推論出最後的第三個公式：
Bx(B-1)÷2x3+B×(C+1)。

八、只要用先用第一個公式，帶入層數 A，計算出 B 與 C，再帶到第三個公式，就可以推算出此 A 層的硬幣三角形所需要移動的最少硬幣數量。

九、現在無論是要計算任何層數的三角形所使用的硬幣總數，還是要計算出最少的硬幣移動數量，甚至是推論移動角的樣貌，我們都有辦法了，而且不要再一個一個畫圖。

十、過程當中我們有找同學來試驗我們的研究，大家都感覺十分有趣。

陸、討論與結論

研究心得

我們在一開始聽到有機會參加科展時，覺得很有趣，並且提出了各種不同的研究題目，而我們因為在偶然的一次機會下，接觸到了翻轉金字塔這個題目，並覺得這個題目在眾多題目中最另我們好奇，經過討論後我們決定來研究這個的題目。

在一開始研究時，我們先實驗最簡單的前幾層，剛開始我們都還覺得簡單，但一到了第五層我們就卡關了，而之後經過老師的指導和大家一起討論之後，慢慢的可以朝更難的層數邁進。在經過我們合力討論、實驗後，找出了 5-10 層的破解方法，再經過我們的觀察，輾轉找出了其中的規律性，例如:都是移動三個角、以三個為一輪來增加...等，但除了找到這些規律以外，我們卻找不到如何用運這些規律來推算出如何移動更難、更大的層數，因此我們開始用我們所找到的規律性來實驗更難的層數，並確認我們的觀念正確後，開始列出推理出來的算式，在經過幾次的試驗和代入未知數後，我們最終找出了三個算式，分別是
(A+1)÷3=B...C、(A+1)xA÷2
和(B-1+1)×(B-1)÷2×3+B×(C+1)，第一個算式是在解釋移動的三個角分別所要移動的層數，第二個算式在計算用硬幣排出三角形時所需要的硬幣總數，而第三個算式則是運用第一個算式的答案去算出最終最少要移動幾顆才能使對應的三角形翻轉。我們為了要解釋這數學公式，

所以我們使用了白板及磁鐵排出我們要的三角形層數，並將須移動的硬幣位置改變，尋找移動顆數及位置的規律性；我們也使用了透明板並在上面著色，顯示移動的規律性。

在我們開始打報告時，我們發現在打遊戲玩法的時候，我們用文字所表達的方法只能讓會玩的人看得懂而已，但沒玩過的人卻看不懂我們的遊戲玩法，因此我們在經過幾次請別人來實驗並將需要修改的地方修正，終於有辦法讓沒玩過這個遊戲的人可以看的一目了然。
我們經過無數次的討論、修正及發現...等的各種動作後，終於有了現在這樣的成果，我們也經由這次的科展，學習到許多東西，像是翻轉金字塔的玩法，還有許多數學上的邏輯思考方式。最後，希望我們的研究能夠受到評審的青睞，讓我們的研究成為評審眼中最亮眼的作品。

柒、參考資料及其他

一、 筆試題的思考：移動最少硬幣讓金字塔上下倒過來　　作者：micro 小寶
原文網址：https://kknews.cc/zh-tw/education/4mmpjnv.html