花蓮縣第61屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：師生鬥智

關鍵詞：勝負決定速率、標準路徑、賽局論

編號：

師生鬥智

摘要

在「*陶哲軒教你聰明解數學*」這本書以及第 52 屆全國中小學科學展覽會國中組數學科「游泳池追逐戰」中，曾討論了師生在泳池中及池邊的追逐，但只有假設學生沿幾種固定路線前進，未討論為什麼選擇這些路線，也未提到師生之間的策略動態變化。本研究以師生兩人都能知道對方想法為基礎，一層一層發展出新的師生策略，並引入賽局論的觀點，最後找到本問題的師生最終路徑，以及勝負決定速率 n。除此之外，我們將泳池從正方形推廣到任意正多邊形，找出可能的最佳路徑。

壹、研究動機

陶哲軒寫的「*陶哲軒教你聰明解數學*」這本書裡有一題是說：一位學生和一位老師在一個正方形游泳池追逐，老師在泳池的邊緣，學生在泳池的中央。老師要想辦法抓到學生，而學生是要甩開老師並成功逃離泳池。我們覺得這是個有趣的問題，而且找了歷屆科展作品發現這個題目雖然有人做過研究，但是還有很多尚未解答的問題，可以討論的東西也比較多，所以引發了我們的興趣。

貳、研究目的

一、比較各種可能路徑，並建立師生雙方的策略。

二、找出師生的最終路徑並計算出勝負決定速率 n。

三、將正方形泳池的結論推廣至其他形狀。

參、研究器材

紙、筆、電腦、WORD、EXCEL、The Geometer's Sketchpad V4(GSP)、三角函數表

肆、名詞定義與文獻探討

一、名詞定義

(一)、符號

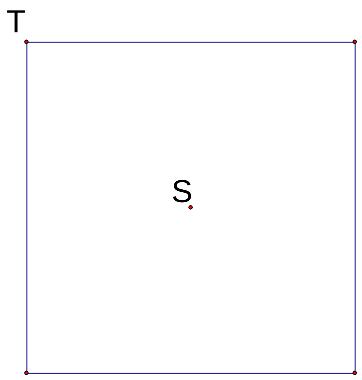
為了方便研究，將正方形及其餘正多邊形的邊長定義為 1，符號 T 代表老師的位置，符號 S 代表學生的位置，老師的速度為學生的 n 倍。

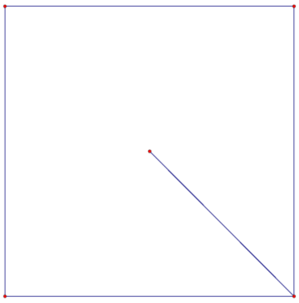
(二)、勝負決定速率

當求出一個特定的 n 值，讓老師能恰好抓到學生，這時的 n 就是勝負決定速率，若老師速度小於 n，則學生可以逃走；若老師速度大於或等於 n，則老師獲勝。

二、文獻探討

本研究出自於一本書「*陶哲軒教你聰明解數學*」。假設一個學生位於正方形泳池的正中央，老師位於泳池的角落，老師的速度是學生的 3 倍，學生可以在水中任意移動，而老師只能在泳池邊上行走，若學生上岸時老師尚未抵達，則學生勝利，反之則為老師勝利，那麼學生有可能逃出老師的手掌心嗎？



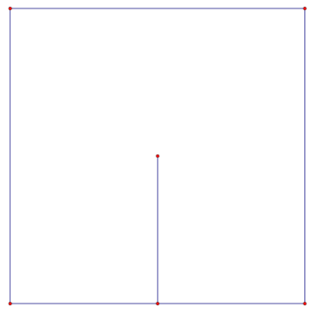


路徑一： 老師在左上角，學生從中心點直接逃向右下角。

如右圖：若定義正方形邊長為 1，學生直接往右下角游，會游 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以老師最多能走 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，而老師只要走 2，小於 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

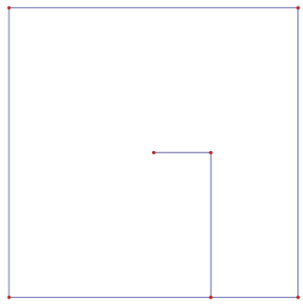
所以老師追的到學生。



路徑二：老師在左上角，學生從中心點垂直往下游向岸邊。

如右圖：學生會走$\frac{1}{2}$，老師只要走$\frac{3}{2}$，

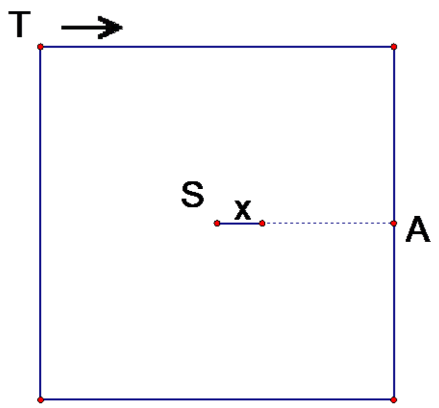
所以老師會剛剛好抓到學生。

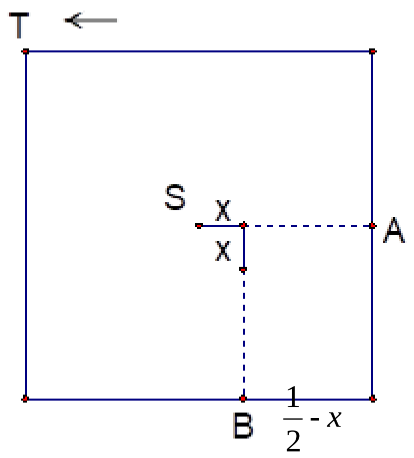


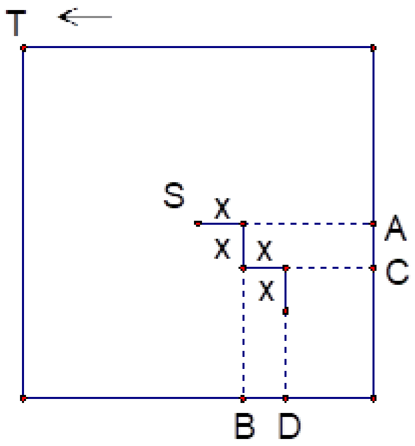
路徑三（學生能逃脫）： 學生水平往右走，走一段距離後轉彎垂直往岸邊游去。如右圖：假設學生先往右走$\frac{1}{6}$，老師只能跟著往右走$\frac{1}{2}$，如果老師不向右走$\frac{1}{2}$，則學生直走到右邊上即可逃脫，所以老師勢必得向右走。這時學生轉彎向下走，情況如下：學生共游$\frac{2}{3}$，此時老師才走 2，還差了$\frac{1}{3}$才能追到學生，如此學生便可逃脫。

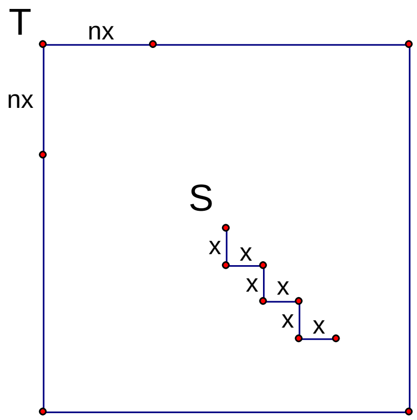
另外，在第五十二屆全國中小學科展的「游泳池追逐戰」結論中也有提到，在「老師永遠選擇學生預定上岸點的最短路徑」的前提下，學生可採階梯式走法往右下走去，讓老師永遠在出發點附近走回頭路，則不管老師的速度有多快，都只能不停重複走相同的路，無法追上學生。

如下圖，如果學生第一步往右x，則第二步須往下，而nx必須小於$\frac{1}{2}-x$，否則老師不會回頭，第三步往右x，而nx必須小於$\frac{1}{2}-2x$，否則老師不會回頭，以此類推，學生可以在離岸邊很近時，直接往岸上走就可以逃脫 (此處僅引用結論，並未將「游泳池追逐戰」的詳細證明過程完整寫出) 。



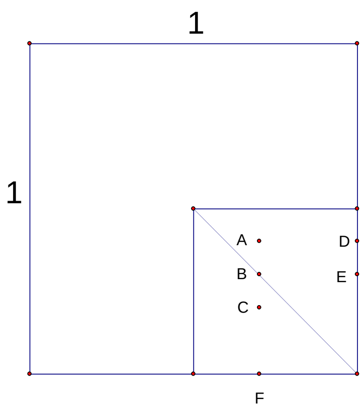






伍、研究過程或方法

我們需要先證明老師有獲勝的可能。若學生的移動方式為 A 到 B 到 C，且學生在 A 點的時候，老師已在學生的最近上岸點 D 點，當學生經過 B 點到 C 點的時候，最近上岸點會改變至 F 點，所以老師必須從 E 點到 F 點。因為原設定 n=3 倍，但老師從 E 點到 F 點只要學生路徑 $\overline{BF}$ 的兩倍，所以學生一定會被抓到。結論是在學生往岸邊前進的狀況下（而非回頭往中間游去），只要老師到達學生的最近上岸點，即使最近上岸點改變，學生還是會被抓到，所以老師在接近學生的狀況下是有可能獲勝的。

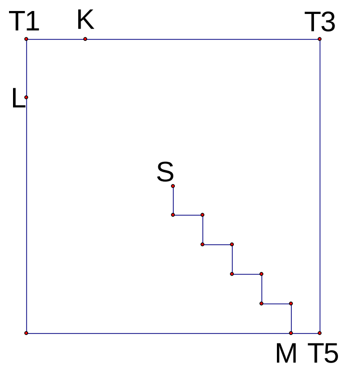


研究一：建立老師策略破解階梯式走法。

根據「游泳池追逐戰」的結論，只要在「老師永遠選擇學生預定上岸點的最短路徑」的前提下，老師永遠不可能獲勝。我們想要修正這個假設，找出在老師和學生都足夠聰明且知道對方所有策略的情況下的勝負決定速率 n 為何。

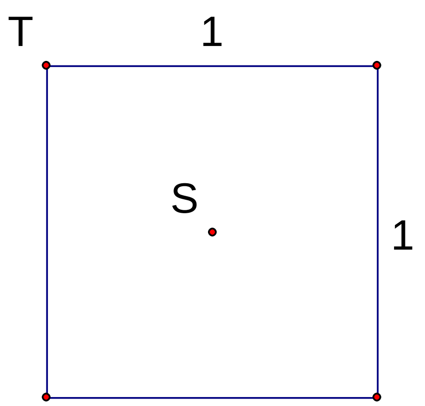
(一)、老師策略 A：出發後不回頭。

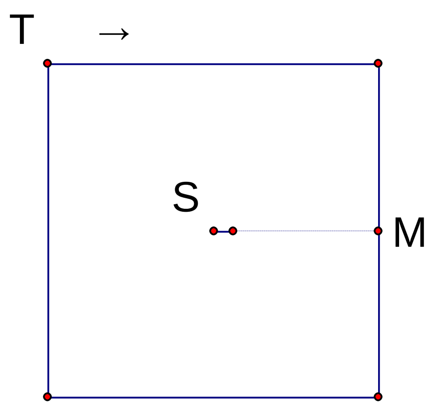
老師為了避免學生使用階梯式走法，所以老師出發後就不回頭，這樣老師就不會因為學生的階梯式走法而卡在 K、L 點來回，只要老師的速率夠大就能夠抓到學生。

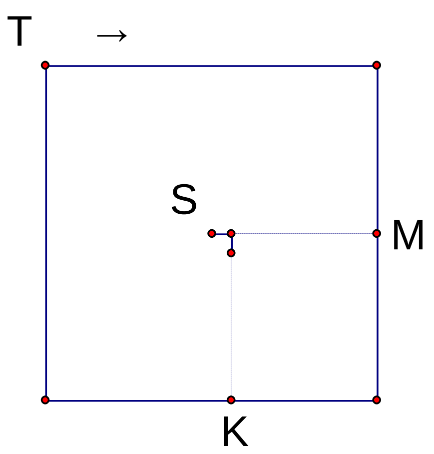


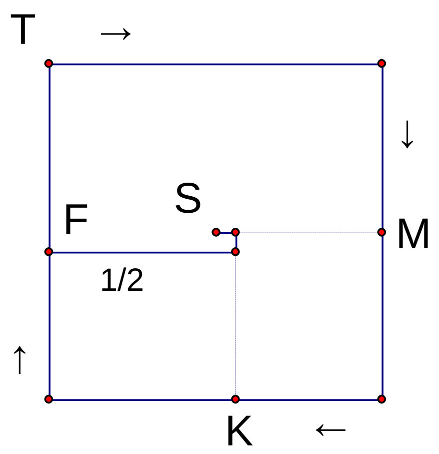
(二)、學生策略 A：假動作。

因為老師出發後不回頭，學生就可以利用這個漏洞，在出發時使用假動作引誘老師往相反方向前進，我們可以設定這個假動作走的長度趨近於 0，所以不影響學生走的路徑長。









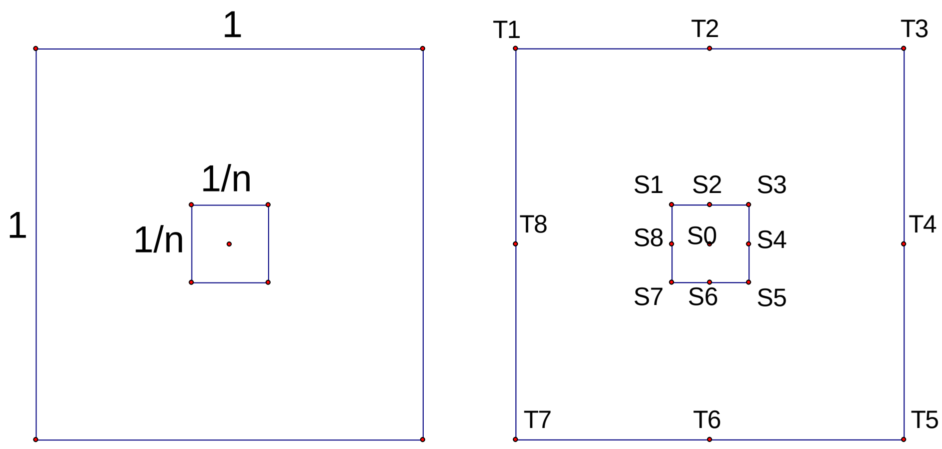
一開始學生往右走一點，而這段距離就像是假動作，它的長度是一個極小值，因此我們把它視為 0，M 點是學生的第一個最近上岸點，老師向右出發。接著學生直接往左跑，此時的勝負決定速率 n＝7。

結論：在老師使用「不回頭」，學生使用「假動作」的策略下，雖然老師可避免永遠追不到的狀況，但勝負決定速率 n 的值太大，因此在下面的研究中我們繼續發展老師的其他策略。

研究二：幫老師找出更多可降低勝負決定速率 n 的策略

我們發現學生在靠近中心的移動和接近岸邊的移動有不同的效果，當學生在中心附近轉彎時，需要走的路徑短，而老師要追上學生需要走的路徑長，相反地，在靠近岸邊時，由於老師的速度是學生的數倍，所以反而是老師佔優勢，能輕鬆追上學生。因此我們假想出一個範圍，在圈內和圈外老師可以有不同策略。

為了明確定義，我們假想出一個邊長為 $\frac{1}{n}$ 的正方形，學生走完一邊的時間，老師也恰好走完游泳池的一邊。因此在圈內學生佔優勢，可改變與老師的相對位置，在圈外則是老師佔優勢，可以拉近與學生的距離，也因此學生在圈外的走法都會是直線。我們將討論中常用的點定義如下。

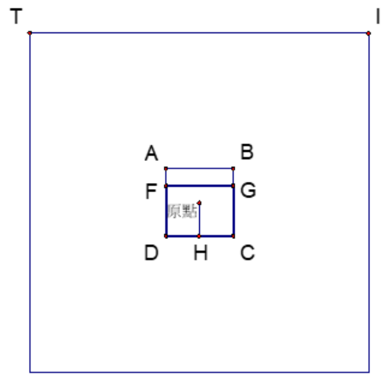


(一)、老師策略 B：學生在圈內時，老師可任意回頭，只有在學生出圈外的狀況下才不回頭。

在這樣的狀況下，學生在圈內使用假動作無效，老師可避免上面 n＝7 的情形，因此學生會選擇 T1S5 的相對位置。

(二)、學生策略 B：選擇 T1S5

1、我們先證明學生在佔內圈優勢下，可以成功調整師生相對位置到 T1S5



$(\overline{AF} = \frac{1}{100n})$

學生路線：原點→H→C→G→F→D。

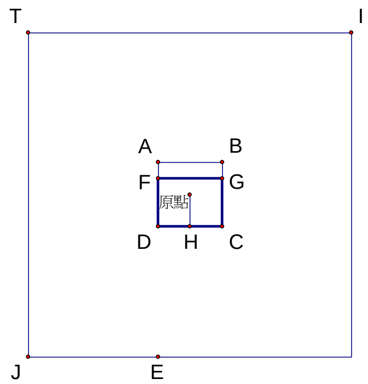
$$路徑長 = \frac{50+50+99+100+99}{100n} = \frac{398}{100n}$$

老師路線：T 點出發逆時針追學生。

路徑長＝$\frac{398}{100}$，尚未回到 T 點。

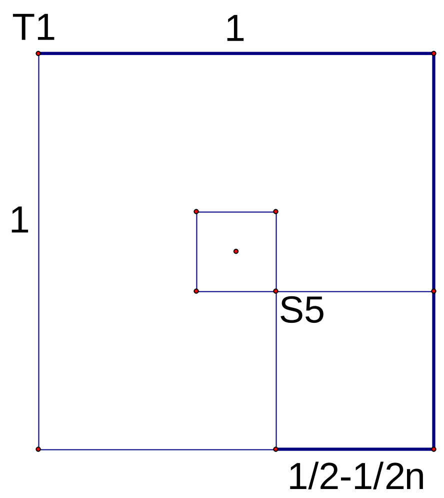
學生走完第一圈後走到 D 點，老師走到 T 點前 $\frac{2}{100}$，所以學生只需要繞 50 圈，就能讓老師在 I 點上，學生在 D 點上，這樣和 T1S5 的效果相同。

若老師在繞 50 圈的過程中使用了圈內可回頭的條件，也就是老師被學生繞到老師在 E 點學生在 G 點時，只要學生繼續從 G 往左走老師就會回頭往 J 的方向，此時學生只要改往 B 走去並原地等待老師，便可讓老師在 J 點，而學生在 B 點，這時和 T1S5 的狀況也相同。以上便是其中一種學生透過內圈優勢將師生位置調整為 T1S5 的方法。



2、接著我們利用「老師能走的路＝老師需要走的路」計算出勝負決定速率 n

學生從 S5 出發後使用假動作，老師卻因為學生已在圈外所以一旦出發後不能回頭，所以被迫繞較大的半圈。



$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ = 學生需要走的路，$\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ = 老師能走的路

$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$ = 老師需要走的路

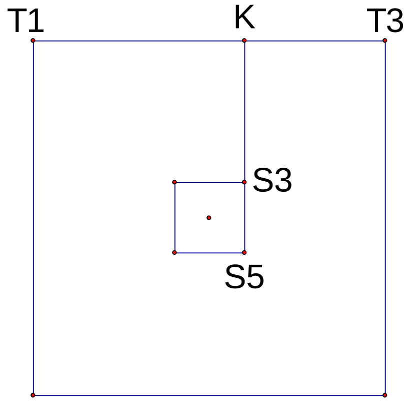
$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$，$n^2-6n+1=0$

$n=3+2\sqrt{2}$，n約等於5.828

我們將這樣的路徑定義為「**標準路徑**」

(三)、學生策略 C：利用老師不回頭從圈外向老師游去，使老師轉一整圈。

兩人從 T1S5 出發，因為學生抓到老師不回頭的漏洞，所以學生假動作引誘老師往順時鐘跑，學生則往 K 點跑，學生在 S3 的時候，老師就在 T3 點了，所以老師只能繼續順時鐘走，學生就只需繼續走往 K 點就好，這樣老師必須繞一大圈才能抓到學生，S3 到 K 的路徑跟標準路徑一樣長，但老師卻需要走更多路，n 會大於標準路徑所需的$3+2\sqrt{2}$。



(四)、老師策略 C：當師生位置靠近(位於同一象限)，老師可回頭，不會形成 n＝無限大的階梯狀路徑，也可以避免上述狀況，在此策略下，師生又回到標準路徑。

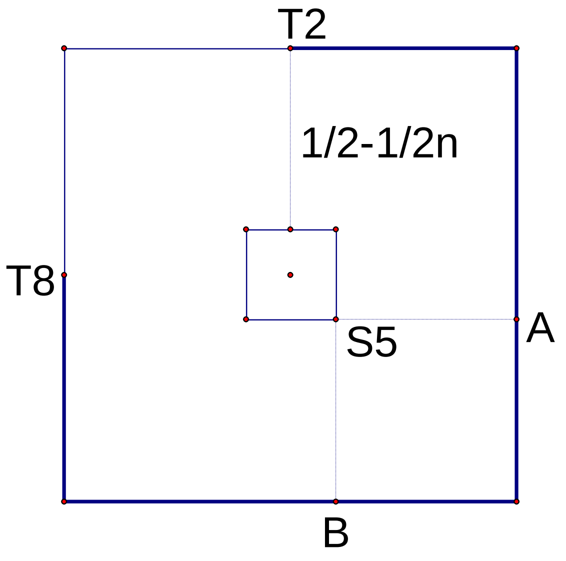
結論：老師心中建立一個邊長為$\frac{1}{n}$的正方形，當學生在圈內或跟老師位於同一象限時，老師可回頭改變前進方向，學生在圈外且與老師不在同一象限時，老師出發後就不回頭。標準路徑的 n＝$3+2\sqrt{2}$，約為 5.828。

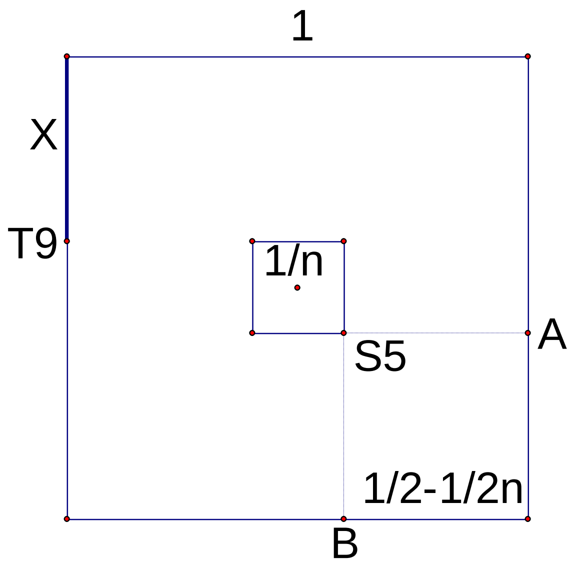
研究三：研究 T(任意)S5 路徑下的勝負決定速率 n

(一)、學生策略 D：用圈內優勢設定老師的新位置。

我們先討論學生的位置固定在 S5 的狀況。假設老師的起始位置在 T2，在這種情況下老師會順時針走，但是學生不管選擇 A 或 B 上岸，老師需要走的距離還是小於 T1S5 標準路徑。同理，老師在從 T2 到 T8 順時針方向中間的點對學生來說都比標準路徑來的差，所以學生在選擇老師的相對位置時會把這些位置都排除。

接下來學生可設定老師的新位置 T9（T9 是 T1 到 T8 間的任意一點，T1 到 T9 距離為 X），學生向右假動作後往 B 前進，老師的路線便從只能從 T9 順時針走到 B，這樣的路徑比標準路徑多走 x，對老師較為不利，所以老師需要發展新策略。





(二)、老師策略 D：用賽局論決定跑的方向，而不是看學生的移動方向決定。

如上圖，設老師位於 T9，學生位於 S5，此時學生的最短上岸點無非就只有 A、B 兩點，所以我們可以引入賽局論的觀點來做分析。

	學生上 A 點時老師需走的路	學生上 B 點老師需走的路
老師走順時針	$X+1+1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})=X+\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$	$X+1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}=X+\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$
老師走逆時針	$1-X+1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})=\frac{5}{2}-X-\frac{1}{2n}$	$1-X+1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})=\frac{3}{2}-X+\frac{1}{2n}$

當老師走順時針方向，學生走 B 點比走 A 點讓老師需要走更長的路時，則老師走逆時針方向，學生走 A 點就絕對比走 B 點讓老師走更長的路，因為不管 X 是多少，老師只要順時針能夠先到 A，那逆時針絕對能先到 B，同理可證，若順 A 比順 B 長，則逆 B 就會比逆 A 長。由於老師不回頭的特性，所以學生必定可透過假動作讓老師走較長路徑。

當順 A 和逆 B 是較長組合時，$X+\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}>\frac{3}{2}-X+\frac{1}{2n}$，

當順 B 和逆 A 是較長組合時，$X+\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}>\frac{5}{2}-X-\frac{1}{2n}$，可看出來不論哪一個組合是較長的，老師絕對會走逆時針，而學生會為了讓老師走長路而走向 A，這是在賽局論下雙方各自選擇對自己最有利的均衡點，此時老師需走的路是$\frac{5}{2}-X-\frac{1}{2n}$。在這遊戲中，學生一定會讓老師走長的路徑，老師在走之前會分析順逆兩條路的長路中哪條較短，並選擇長路中的較短的走法，所以賽局論能讓老師拿回選擇走法的主動性。

(三)、賽局論在順時針和逆時針走法對稱時沒有功能。

如下表可知在 T1S5 標準路徑的狀況下，因為路線對稱的緣故，順 A 等於逆 B，順 B 等於逆 A，所以透過賽局論沒辦法幫助老師在對稱路線時選擇一條較有利的路線，師生雙方還是回到原來的標準路徑，也就是老師需走 $\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$ 。

T1S5 標準路徑	學生走 A 點老師需走的路	學生走 B 點老師需走的路
順時針	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$	$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$
逆時針	$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$

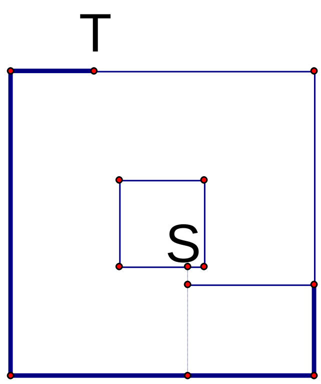
(四)、標準路徑 T1S5 仍是對學生來說的最佳選擇。

根據上述分析，可看到在標準路徑時老師需走的路仍比 T9S5 長，$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}>\frac{5}{2}-X-\frac{1}{2n}$，所以學生會選擇讓老師在 T1，自己在 S5 的標準路徑。

結論：在 T(任意)S5 的狀況下，我們透過賽局論分析出老師需要走的路徑都比標準路徑 T1S5 短，所以學生仍會選擇標準路徑 T1S5。

研究四：當 T(任意) S(任意)時，標準路徑 T1S5 是否仍為學生的最佳選擇

(一)、學生策略 E：不從 S5 出發，利用假動作讓老師走更長的路

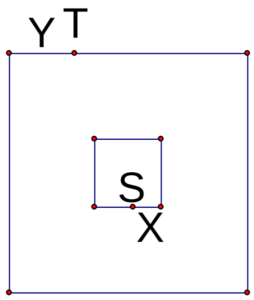


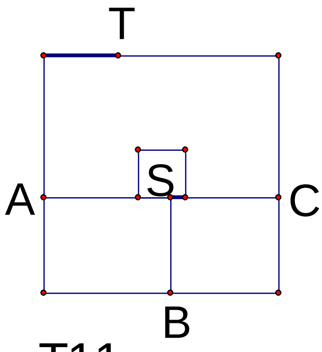
如果學生和頂點距離極短，走出圈外一點點再往右方，因為沒有兩個上岸點，無法使用賽局論分析路徑，在學生使用假動作的狀況下，老師走的路就會增加，n 也會就會增加。

(二)、老師策略 E：看師生相對於 T1S5 的距離來決定走向，而不是學生的移動

X＝學生和 S5 的距離，Y＝老師和 T1 的距離

學生有 $\overline{SA}$ 、$\overline{SB}$ 、$\overline{SC}$ 三種可能的路徑





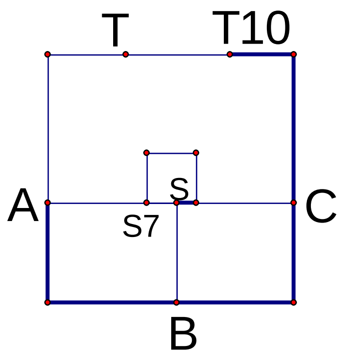
$\overline{SA} \neq \overline{SB} \neq \overline{SC}$，要使它們的距離一樣，

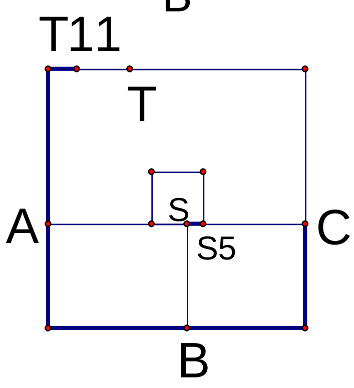
應讓學生從 S 走到 S7，

老師會從 T 走到 T10，此時 $\overline{S7A} = \overline{SB}$ ，

才可比較老師走的距離。

同理學生想走到 C 點也是一樣，





當學生走到 S5，老師走到 T11，在以下的表格中，我們即是使用 $\overline{S7A}$ 、$\overline{SB}$ 、$\overline{S5C}$ 來做討論。

	學生走 $\overline{S7A}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{SB}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{S5C}$ 老師需走的路
順時針	$\frac{7}{2} - \frac{1}{2n} - Y - 1 + nX$ $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} - Y + nX$	$\frac{5}{2} - \frac{1}{2n} - Y + X$	不可能
逆時針	不可能	$Y + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - X$ $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} + Y - X$	$Y + 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - nX$ $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} + Y - nX$

老師需要走的路順 A 比順 B 長 $\frac{5}{2} - \frac{1}{2n} - Y + nX > \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} - Y + X$

如果比較逆 B 和逆 C：

$$逆C－逆B＝\frac{5}{2} - \frac{1}{2n} + Y - nX - \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} - Y + X = 1 - \frac{1}{n} - (n-1)X = \frac{n-1}{n} - (n-1)X = (n-1)(\frac{1}{n} - X)$$

因為 n－1＞0，且 $\frac{1}{n} - X > 0$，所以老師需要走的路逆 C 比逆 B 長，老師會在順 A 和逆 C 之間挑選比較短的路。

當 $Y > nX$ 時，順 A＜逆 C：$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX < \frac{5}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

當 $Y < nX$ 時，順 A＞逆 C：$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX > \frac{5}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

所以 $Y > nX$ 的話老師就順時針走，$Y < nX$ 的話老師就逆時針走。

但若與標準路徑老師需走 $\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$ 來比較，當 $Y > nX$ 時，$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX < \frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$，當 $Y < nX$ 時，$\frac{5}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX < \frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$，所以學生會讓老師走標準路徑。

結論：老師在岸邊的其他任意位置，學生在小正方形的其他任意位置，所得出的 n 都小於 $3+2\sqrt{2}$，因此對學生最有利的走法就是標準路徑 T1S5。

$\boxed{\text{研究五}}$：老師設定的小正方形邊長 $\frac{1}{n}$ 是否為最佳選擇

(一)、若老師設定新的小正方形邊長 $\frac{1}{x} > \frac{1}{n}$

$\overline{SB} = (1-\frac{1}{x}) \div 2$

$\frac{n}{2}-\frac{n}{2x} = 2+(1-\frac{1}{x}) \div 2$

$n-\frac{n}{x} = 5-\frac{1}{x}$

$nx-n+1 = 5x$

$n-1 = x(n-5)$

$x = \frac{n-1}{n-5}$

又 $\frac{1}{x} > \frac{1}{n}$，所以 $n > x$

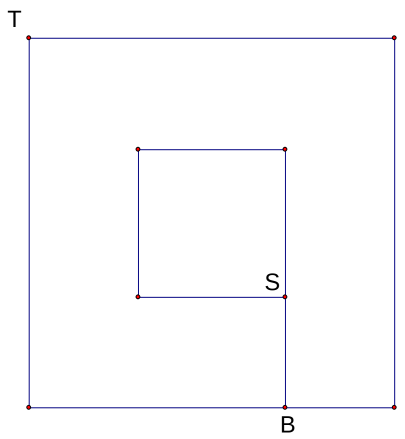
$n > \frac{n-1}{n-5}$

$n^2-5n > n-1$

(若 $n<5$ 則學生假動作使老師繞遠路時會追不上學生，所以 $n>5$)

$n^2-6n+1 > 0$

$n > 3+2\sqrt{2}$



小正方形邊長大於 $\frac{1}{n}$ 時，n 會大於標準路徑的 5.828。

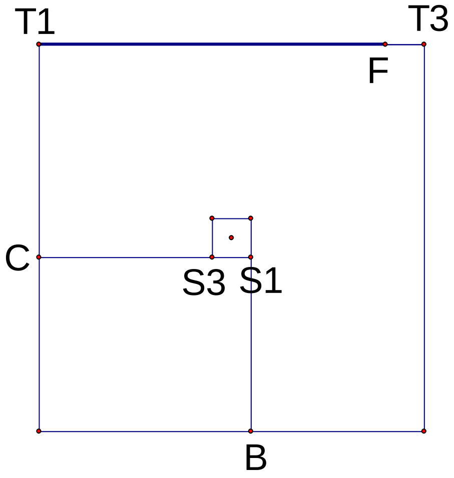
(二)、若老師設定新的小正方形邊長 $\frac{1}{x} < \frac{1}{n}$

如下圖，學生從 S1 走到 S3 的時候，老師只會走到 F 點，所以學生走 S1C 會比 S1B 好，因為走 S1C 會讓老師多走 FT3 這段路。我們設定內圈正方形的邊長為 $\frac{1}{x}$，學生走 S1C，老師從 T1 順時針走到 C

$$\frac{1}{2}n+\frac{n}{2x}=3.5-\frac{1}{2x}$$
$$n+1=7x-xn$$
$$1+n=(7-n)x$$
$$\frac{1+n}{7-n}=x$$
又$\frac{1}{x}<\frac{1}{n}$
$$x>n$$

可得$\frac{1+n}{7-n}>n$

從前面研究一研究二可知$n<7$
$$7-n>0$$
所以$1+n>7n-n^2$
$$n^2-6n+1>0$$
$$(n-3)^2>8$$
$$n>3+2\sqrt{2}$$



小正方形邊長小於$\frac{1}{n}$時，n 會大於標準路徑的 5.828。

結論：不論小正方形邊長大於或小於$\frac{1}{n}$，都會提高勝負決定速率 n，所以老師設定內圈時必會選擇邊長恰好為$\frac{1}{n}$

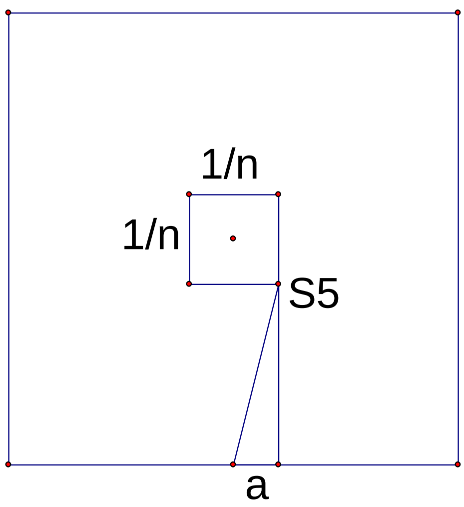
研究六：研究如何優化標準路徑

(一)、學生策略 F：走斜線優化標準路徑。

我們猜測學生如果斜著走，可能存在將 n 提高的路徑。

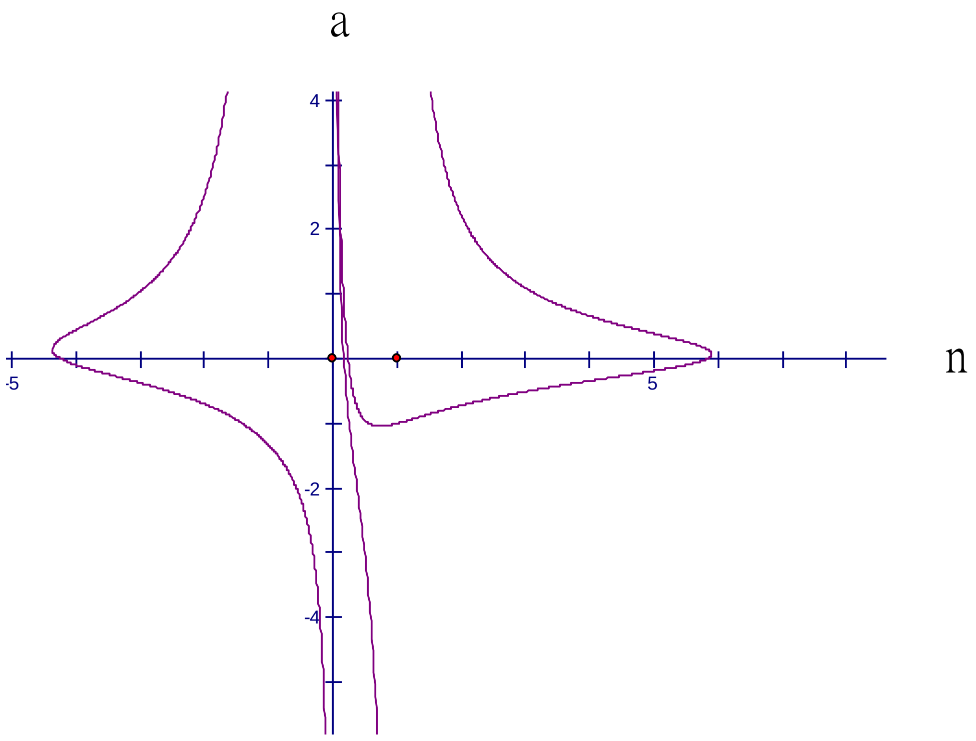
學生走斜線的距離為$\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)^2}$

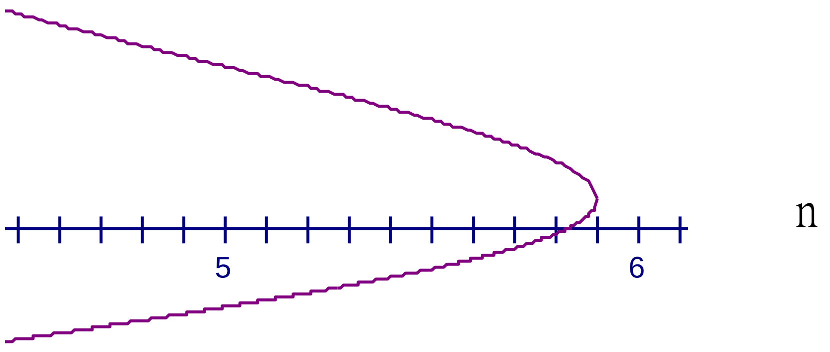
老師能走的距離為$n\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)^2}$，則



$$2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+a=n\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)^2}$$
$$\frac{25}{4}+\frac{1}{4n^2}+a^2+5a-\frac{5}{2n}-\frac{a}{n}=n^2(a^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})^2)$$
$$\frac{25}{4}+\frac{1}{4n^2}+a^2+5a-\frac{5}{2n}-\frac{a}{n}=n^2(a^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2})$$
$$(1-n^2)a^2+(5-\frac{1}{n})a+(-\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}+6-\frac{5}{2n}+\frac{1}{4n^2})=0$$
$$a=\frac{-5+\frac{1}{n}\pm\sqrt{(-n^4+2n^3+25n^2-12n+2)}}{2-2n^2}$$

n	a1	a2
5.83	0.000767	0.145599
5.9	0.061277	0.081595
5.901	0.065839	0.076984
5.9013	0.068336	0.074473
5.9014	0.069917	0.072887
5.90142	0.070528	0.072274
5.90143	0.071198	0.071604
5.91	無解	無解
6	無解	無解





由上圖和表格中可以看出，n 值最多增加至 5.9 左右，超過則無解。

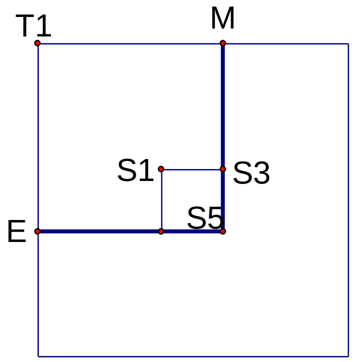
(二)、 上述的走斜線優化結果是對學生來說的最佳路徑，其餘路徑都比較差

1、左上方對學生是較差路徑

只要往左上走，學生就會以更快的速度接近老師，

更何況還會進到內圈，老師也可以輕易地接近學生，

因此左上角我們不會考慮。



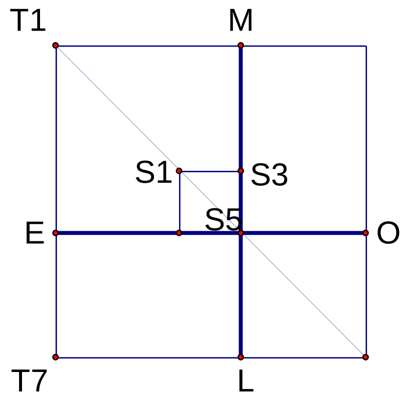
2、和標準路徑相同的其他路徑

上圖是對稱圖形，因此我們只要看 S5M 跟 S5O。內圈

邊長為 $\frac{1}{n}$ ，因此當學生從 S5 走到 S3 時，老師也剛好

可以從 T1 到 T7，T7S3 和 T1S5 相同，所以 S5M 跟 S5O

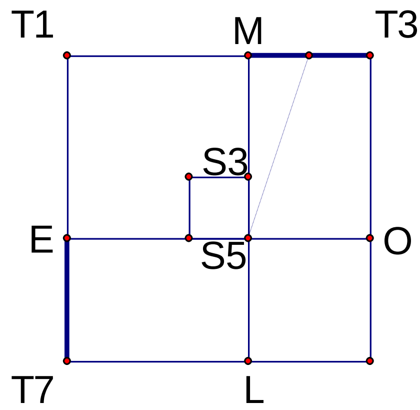
都和標準路徑 S5L 相同



3、T3M 和 T7E 範圍對學生較差

學生不會選擇 T3M 或 T7E 的範圍當最終上岸點，

因為跟標準路徑比起來學生會多走，老師反而會少走。

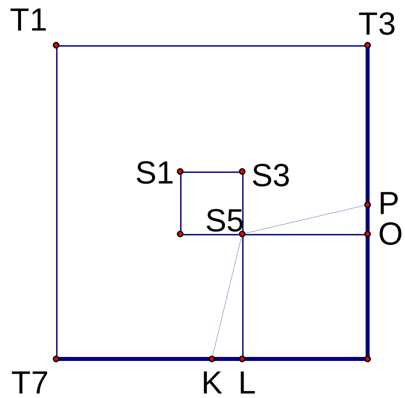


4、T3 到 T7 之間

在研究六一開始我們就確定了，在粗線範圍內

S5P 跟 S5K 是最好的路徑($n \approx 5.9$) ，因此粗線上的

其他路徑都不如 S5P 跟 S5K。

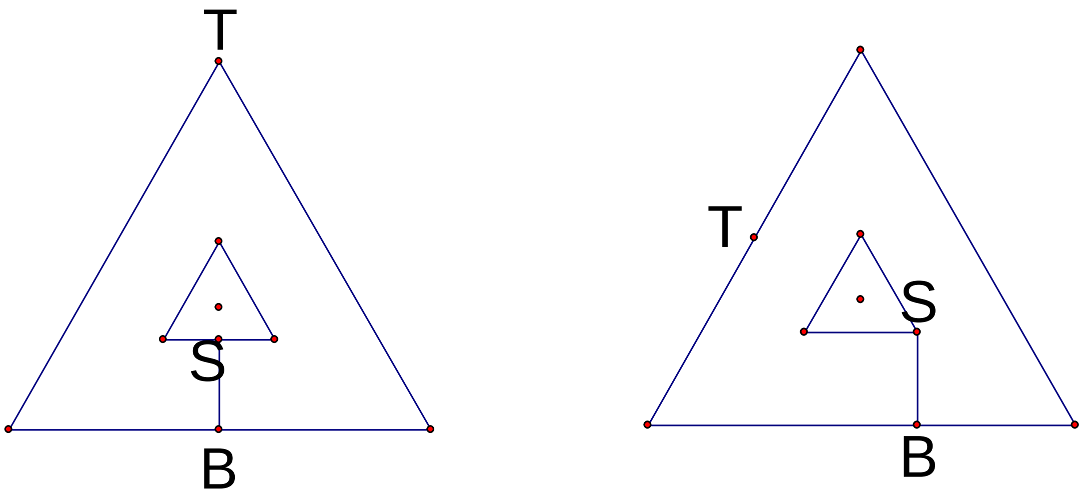


結論：我們利用 excel 算出 n 的近似值，並使用 gsp 畫出函數圖形，發現 n 最多增加到 5.9 左右，同時考慮了從 T1S5 出發的所有其他路徑，發現 n 約為 5.9 已經是最大勝負決定速率。到這裡，我們已經窮盡了原問題的所有可能(包括師生的可能位置、師生的可能路線)。

研究七：將正方形結論推廣至正三角形與正多邊形

(一)、正三角形

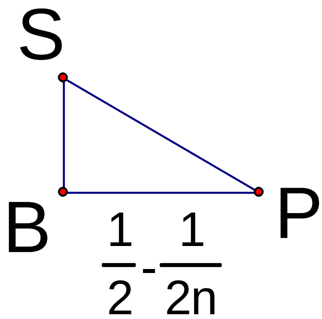
1、比較路徑一(T 在頂點，S 在中點) 與 路徑二(T 在中點，S 在頂點。對應**標準路徑**)



學生會選路徑二的原因是， 這兩個路徑學生走的距離相同，但路徑一老師只需走 $\frac{3}{2}$ 的路就能抓到學生，而路徑二老師卻需要走 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ ，所以學生一定選路徑二。

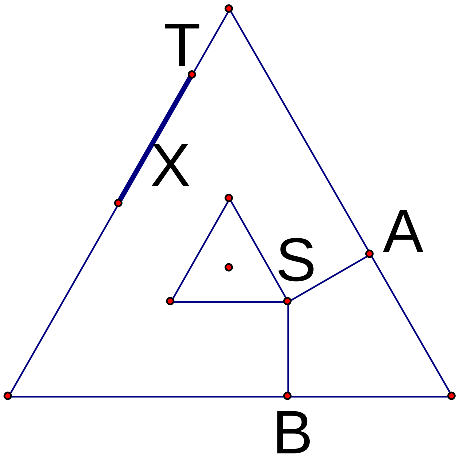
$$\angle \mathrm{P} = 60° \div 2 = 30°$$
$$\overline{\mathrm{SB}} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6n}$$
$$\frac{\sqrt{3}n}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{1}{2n}$$
$$\sqrt{3}n^2 - \sqrt{3}n = 12n - 3$$
$$\sqrt{3}n^2 - \sqrt{3}n - 12n + 3 = 0$$
$$\sqrt{3}n^2 + (-\sqrt{3}-12)n + 3 = 0$$

$$n^2 + (-1-4\sqrt{3})n + \sqrt{3} = 0$$
$$n = \frac{1+4\sqrt{3}+\sqrt{8\sqrt{3}+49-4\sqrt{3}}}{2}$$
$$n = \frac{1+4\sqrt{3}+\sqrt{4\sqrt{3}+49}}{2}$$
$$n \approx \frac{7.9+7.48}{2}$$
$$\mathrm{n} \approx 7.69$$



路徑二(**標準路徑**)的 n 約等於 7.69

2、路徑三(T 在中點及頂點之間)



	學生走 A 點老師需走的路	學生走 B 點老師需走的路
順時針	$1 - X + \frac{1}{2n}$	$2 - X - \frac{1}{2n}$
逆時針	$2 + X - \frac{1}{2n}$	$1 + X + \frac{1}{2n}$

當順 B 和逆 A 比較長時， $2 - X - \frac{1}{2n} < 2 + X - \frac{1}{2n}$

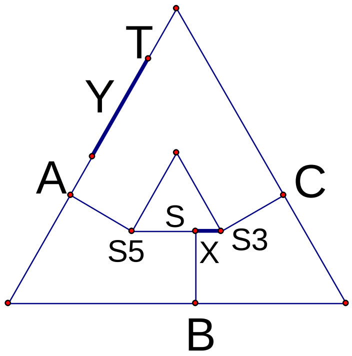
當順 A 和逆 B 比較長時，$1 - X + \frac{1}{2n} < 1 + X + \frac{1}{2n}$

透過賽局論，老師會決定走順時針，而學生就會走 B。

但因為順 B 路徑老師需要走的路比標準路徑短，$2 - X - \frac{1}{2n} < 2 - \frac{1}{2n}$

所以學生仍然會選擇路徑二(**標準路徑**)。

3、路徑四(T 和 S 都在中點及頂點之間)



	學生走 $\overline{S5A}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{SB}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{S3C}$ 老師需走的路
順時針	$\frac{1}{2} - Y + 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - (1 - nX)$ $= 2 - \frac{1}{2n} - Y + nX$	$\frac{1}{2} - Y + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + X$ $= 2 - \frac{1}{2n} - Y + X$	不可能
逆時針	不可能	$\frac{1}{2} + Y + 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + X)$ $= 1 + \frac{1}{2n} + Y - X$	$\frac{1}{2} + Y + 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}) - nX$ $= 2 - \frac{1}{2n} + Y - nX$

老師需要走的路順 A 比順 B 長，$2-\frac{1}{2n}-Y+nX>2-\frac{1}{2n}-Y+X$

如果比較逆 B 和逆 C：$1+\frac{1}{2n}+Y-X<2-\frac{1}{2n}+Y-nX$　(理由同正方形)

老師需要走的路逆 C 比逆 B 長，老師會在順 A 和逆 C 之間挑選比較短的路。

當 $Y>nX$ 時，順 A＜逆 C：$2-\frac{1}{2n}-Y+nX<2-\frac{1}{2n}+Y-nX$

當 $Y<nX$ 時，順 A＞逆 C：$2-\frac{1}{2n}-Y+nX>2-\frac{1}{2n}+Y-nX$

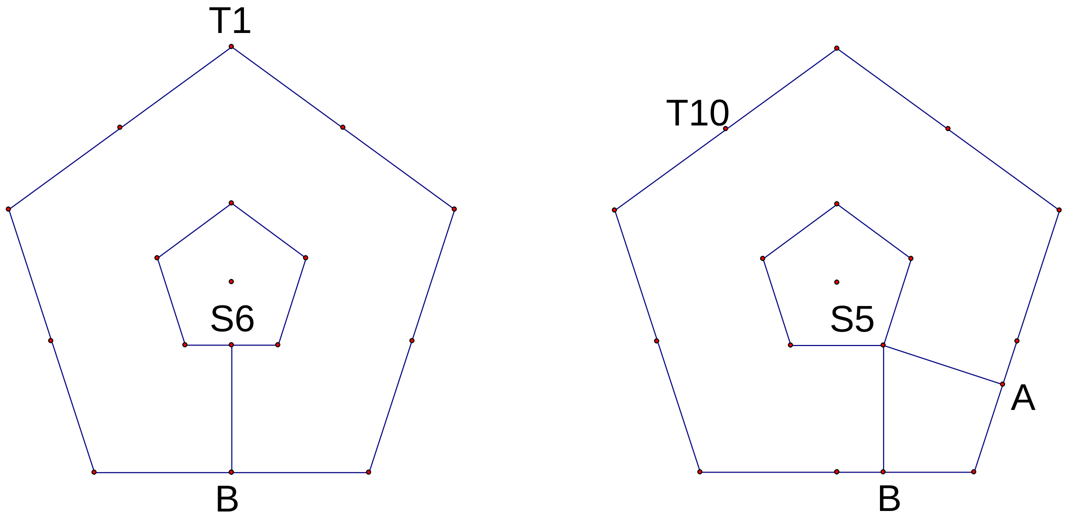
所以 $Y>nX$ 的話老師就順時針走，$Y<nX$ 的話老師就逆時針走。

但若與標準路徑老師需走 $2-\frac{1}{2n}$ 來比較，當 $Y>nX$ 時，$2-\frac{1}{2n}-Y+nX<2-\frac{1}{2n}$，當 $Y<nX$ 時，$2-\frac{1}{2n}+Y-nX<2-\frac{1}{2n}$，所以學生還是會讓老師走標準路徑。

小結：學生仍會選擇三角形的標準路徑，此時的勝負決定速率 n 約為 7.69，其他路徑都較差

(二)、正五邊形：

1、比較路徑一(T 在頂點，S 在中點) 與 路徑二(T 在中點，S 在頂點，對應**標準路徑**)



路徑一老師走哪一邊都一樣是走 $\frac{5}{2}$。路徑二因為學生一定會讓老師走遠的路所以當老師的路線為順時針時，學生會走 B，當老師的路線為逆時針時，學生就會走向 A。老師所走的路皆為 $3-\frac{1}{2n}$，因為 $3-\frac{1}{2n}>\frac{5}{2}$，所以學生會選路徑二(**標準路徑**)。

$\angle SHB = 54°$

$\overline{BH} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

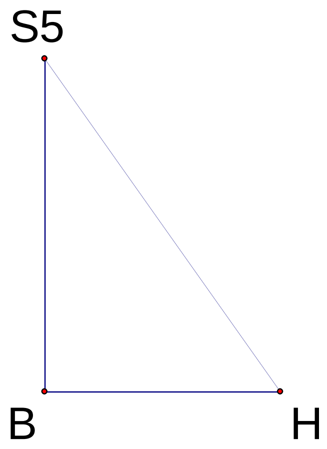
$\overline{SB} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\tan 54°$

$n\left[(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\tan 54°\right] = 3 - \frac{1}{2n}$

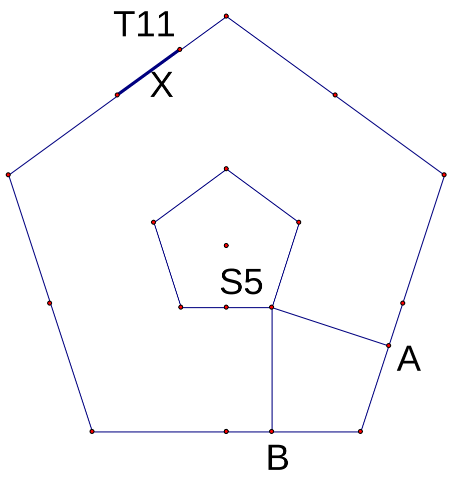
$1.3764n^2 - 7.3764n + 1 = 0$

$n \approx 5.22$

所以當學生選擇路徑二(**標準路徑**)時，n 約為 5.22



2、路徑三(T 在中點與頂點之間，S 在頂點)

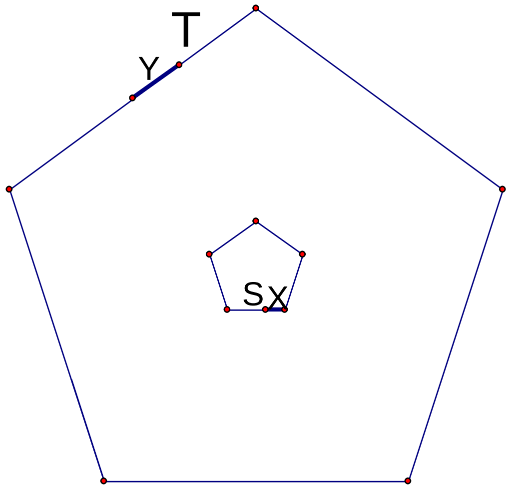


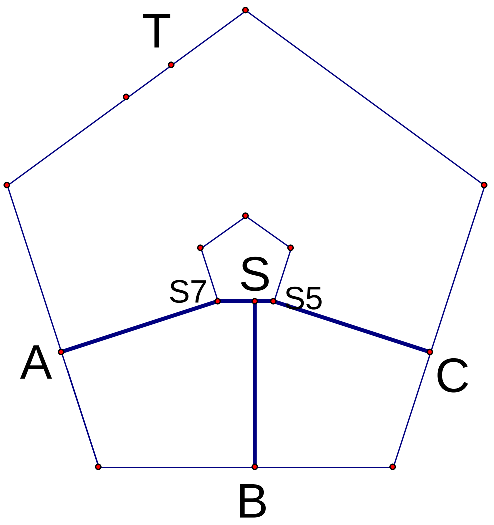
	學生走 A 點老師需走的路	學生走 B 點老師需走的路
順時針	$2 - X + \frac{1}{2n}$	$3 - X - \frac{1}{2n}$
逆時針	$3 + X - \frac{1}{2n}$	$2 + X + \frac{1}{2n}$

當順 A 和逆 B 比較長時，$2 - X + \frac{1}{2n} < 2 + X + \frac{1}{2n}$

當順 B 和逆 A 比較長時，$3 - X - \frac{1}{2n} < 3 + X - \frac{1}{2n}$，透過賽局論，老師會決定走順時針，而學生就會走 B。但因為$3 - X - \frac{1}{2n} < 3 - \frac{1}{2n}$，在希望盡量讓老師走遠路的狀況下，所以學生仍然會選擇路徑二(**標準路徑**)。

3、路徑四(T 在頂點中點之間，S 在頂點中點之間)





	學生走 $\overline{S7A}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{SB}$ 老師需走的路	學生走 $\overline{S5C}$ 老師需走的路
順時針	$4-\frac{1}{2n}-Y-1+nX$ $=3-\frac{1}{2n}-Y+nX$	$3-\frac{1}{2n}-Y+X$	不可能
逆時針	不可能	$2+\frac{1}{2n}+Y-X$	$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$ $=3-\frac{1}{2n}+Y-nX$

同前面正方形的計算，順 A＞順 B，逆 C＞逆 B，

$Y>nX$ 時順 A＜逆 C， $3-\frac{1}{2n}-Y+nX<3-\frac{1}{2n}+Y-nX$

$Y<nX$ 時順 A＞逆 C，$3-\frac{1}{2n}-Y+nX>3-\frac{1}{2n}+Y-nX$

所以 $Y>nX$ 的話老師就順時針走， $Y<nX$ 的話老師就逆時針走。

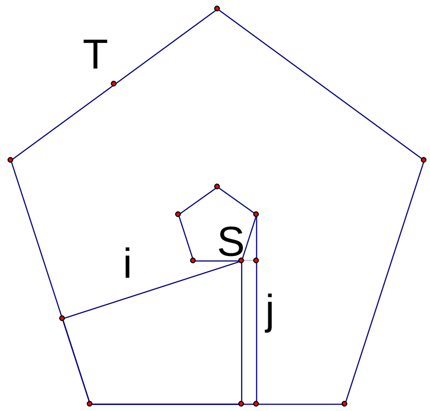
但若與標準路徑老師需走 $3-\frac{1}{2n}$ 來比較，當 $Y>nX$ 時，$3-\frac{1}{2n}-Y+nX<3-\frac{1}{2n}$ ，當 $Y<nX$ 時，$3-\frac{1}{2n}+Y-nX<3-\frac{1}{2n}$ ，所以學生還是會讓老師走標準路徑。

4、路徑五----五邊形以上的新路徑

五邊形以上有新路徑，也就是學生不往最近邊走去，而是向較遠的邊走去(下圖 i 路線)

圖中 i、j 兩條路線是相同的，但學生走的是 i 路線，

我們故意把 i 搬到 j 和原路徑比較，方便算出 i 路徑的長度。



$$\sin 72° = y \div \frac{1}{n}$$

$$\frac{\sin 72°}{n} = y$$

$$\cos 72° = x \div \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{\sin 72°}{\mathrm{n}} + \frac{\tan 54°}{2} - \frac{\tan 54°}{2\mathrm{n}}\right)n = 4 - \frac{1}{2\mathrm{n}} - \frac{\cos 72°}{n}$$

$$\sin 72° + \frac{n(\tan 54°)}{2} - \frac{\tan 54°}{2} = 4 - \frac{1}{2n} - \frac{\cos 72°}{n}$$

$$2n(\sin 72°) + n^2(\tan 54°) - n(\tan 54°) = 8n - 1 - 2(\cos 72°)$$

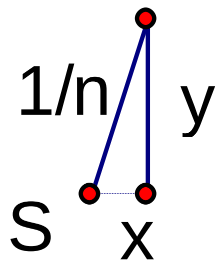
$$2n(\sin 72°) + n^2(\tan 54°) - n(\tan 54°) - 8n + 1 + 2(\cos 72°) = 0$$

$$(\tan 54°)n^2 + [2(\sin 72°) - \tan 54° - 8]n + 1 + 2(\cos 72°) = 0$$

$$1.3764n^2 - 7.4742n + 1.618 = 0$$

$$n = \frac{7.4742 + \sqrt{55.86 - 8.91}}{2.7528}$$

$$n \approx 5.204 < 5.22$$



所以對學生來說五邊形的新路徑不如標準路徑好，學生仍會選擇標準路徑。

$\boxed{\text{小結：學生會選擇五邊形的標準路徑，此時的勝負決定速率 n 約為 5.22，其他路徑都較差}}$

(三)、正六邊形

從前面的例子可以看出，師生皆位於邊上中點的狀況老師只需走周長的一半，對學生不利，所以學生會選擇兩人都在頂點開始。

1、路徑一(師在頂點，學生在頂點。對應**標準路徑**)

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2n}$$

$$\frac{\sqrt{3}n}{2} - \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2n}$$

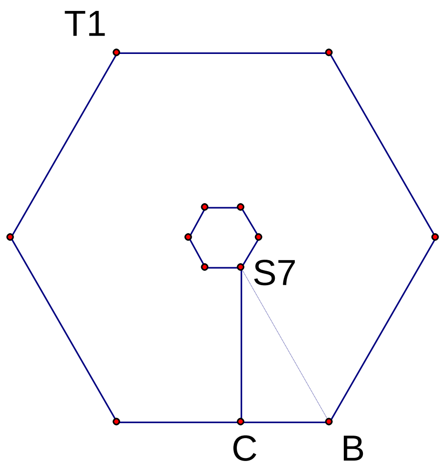
$$\sqrt{3}n - \sqrt{3} = 7 - \frac{1}{n}$$

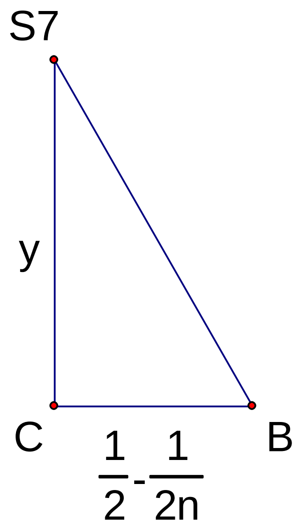
$$\sqrt{3}n^2 - \sqrt{3}n - 7n + 1 = 0$$

$$n = \frac{\sqrt{3} + 7 + \sqrt{3 + 14\sqrt{3} + 49 - 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

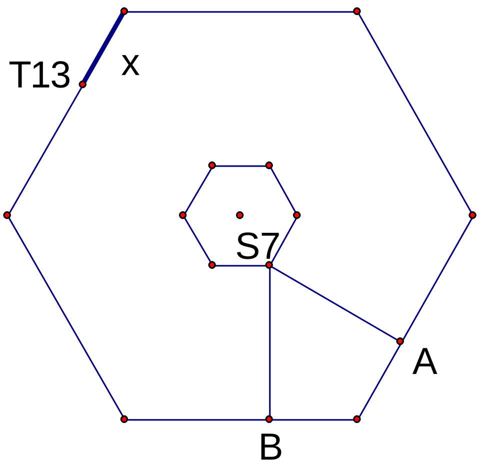
$$n \approx 4.924$$

正六邊形的標準路徑的 n 約為 4.924





2、路徑二(T 在頂點與中點之間)

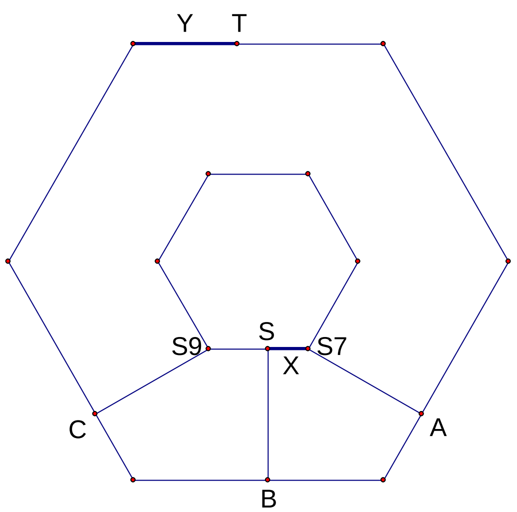


	學生走 A 點老師需走的路	學生走 B 點老師需走的路
順時針	$\frac{5}{2}+x+\frac{1}{2n}$	$\frac{7}{2}+x-\frac{1}{2n}$
逆時針	$\frac{7}{2}-x-\frac{1}{2n}$	$\frac{5}{2}-x+\frac{1}{2n}$

當順 A 和逆 B 比較長時，$\frac{5}{2}+x+\frac{1}{2n}>\frac{5}{2}-x+\frac{1}{2n}$

當順 B 和逆 A 比較長時，$\frac{7}{2}+x-\frac{1}{2n}>\frac{7}{2}-x-\frac{1}{2n}$，透過賽局論，老師會決定走逆時針，而學生就會走 A。但因為$\frac{7}{2}-x-\frac{1}{2n}<\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}$，在希望盡量讓老師走遠路的狀況下，所以學生仍然會選擇標準路徑。

3、路徑三(T 在頂點中點之間，S 也在頂點中點之間)



	學生走$\overline{S9C}$老師需走的路	學生走$\overline{SB}$老師需走的路	學生走$\overline{S7A}$老師需走的路
順時針	$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX$	$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+X$	不可能
逆時針	不可能	$\frac{5}{2}+\frac{1}{2n}+Y-X$	$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

老師需要走的路順 C 比順 B 長 $\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX>\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+X$

如果比較逆 B 和逆 A：$\frac{5}{2}+\frac{1}{2n}+Y-X<\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$ (理由同正方形)

老師需要走的路逆 A 比逆 B 長，老師會在順 C 和逆 A 之間挑選比較短的路。

當 $Y>nX$ 時，順 C＜逆 A：$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX<\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

當 $Y<nX$ 時，順 C＞逆 A：$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX>\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

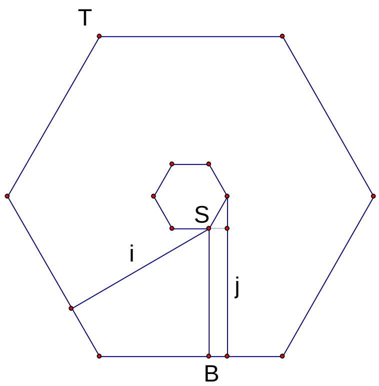
所以 $Y>nX$ 的話老師就順時針走，$Y<nX$ 的話老師就逆時針走。

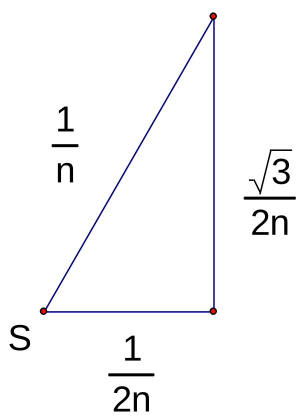
但若與標準路徑老師需走 $\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}$ 來比較，，當 $Y>nX$ 時，$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX<\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}$，當 $Y<nX$ 時，$\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX<\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}$，所以學生還是會讓老師走標準路徑。

4、路徑四----往較遠邊走去的新路徑 (i 路徑)

i 路徑長＝j 路徑長＝ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2n}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{3}n}{2}=5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}$$
$$\sqrt{3}n^2=9n-2$$
$$\sqrt{3}n^2-9n+2=0$$
$$n=\frac{9+\sqrt{81-8\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$
$$n\approx 4.964$$





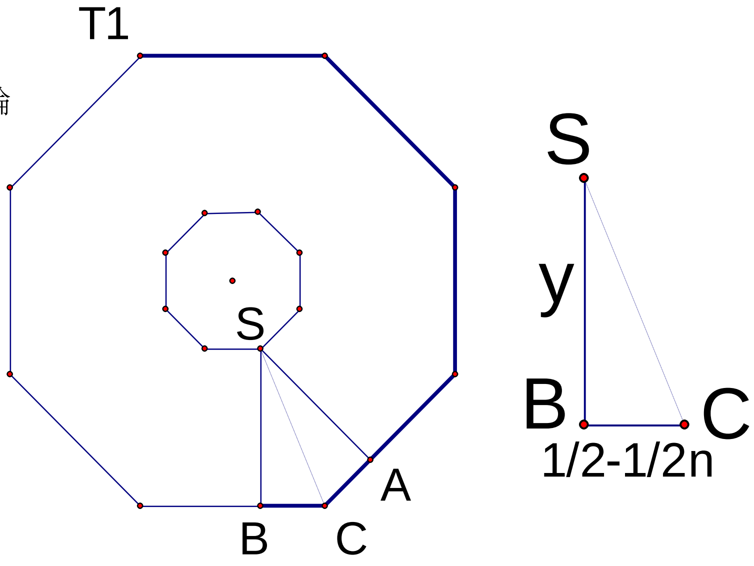
標準路徑的 n 約為 4.924，所以學生會選擇新路徑。

小結： 六邊形新路徑的 n 比標準路徑及其他路徑都大，學生會選新路徑，此時的 n 約為 4.964。

(四)、正 a 邊形

1、路徑一(學生在頂點，老師在他最遠處的對稱位置。對應**標準路徑**)

(1)、a＝偶數



依照前面的例子，直接從師生都在頂點討論

$$\angle BSC=\frac{180^\circ}{a},\ y=\cot\frac{180^\circ}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}=\cot\frac{180^\circ}{a}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$an+n-1=\cot\frac{180^\circ}{a}(n^2-n)$$

$$\tan\frac{180^\circ}{a}(an+n-1)=n^2-n$$

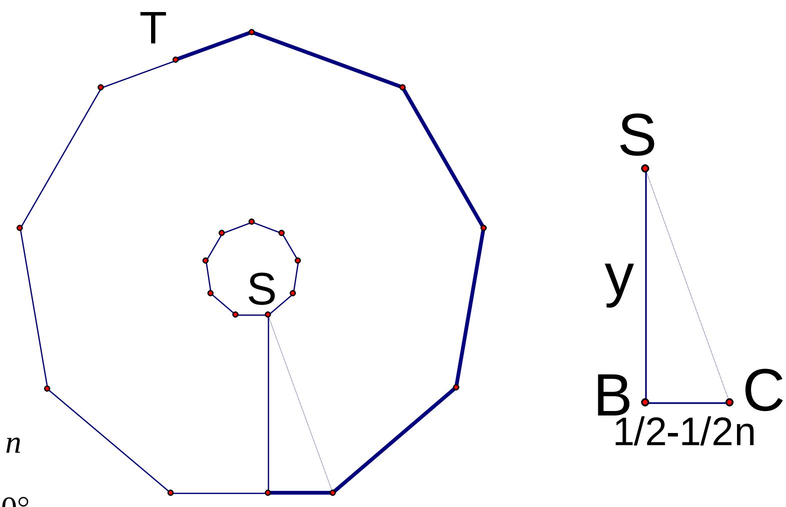
$$\tan\frac{180^\circ}{a}an+\tan\frac{180^\circ}{a}n-\tan\frac{180^\circ}{a}=n^2-n$$

$$n^2-[1+(\tan\frac{180^\circ}{a}a)+\tan\frac{180^\circ}{a}]n+\tan\frac{180^\circ}{a}=0$$

$$n=\frac{[1+(\tan\frac{180^\circ}{a})a+\tan\frac{180^\circ}{a}]+\sqrt{[1+(\tan\frac{180^\circ}{a})a+\tan\frac{180^\circ}{a}]^2-4(\tan\frac{180^\circ}{a})}}{2}$$

(2)、a＝奇數

依照五邊形的經驗，可以直接從老師在中點，學生在頂點開始討論



$$\angle BSC=\frac{180^\circ}{a},\ y=\cot\frac{180^\circ}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}=\cot\frac{180^\circ}{a}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$an+n-1=\cot\frac{180^\circ}{a}(n^2-n)$$

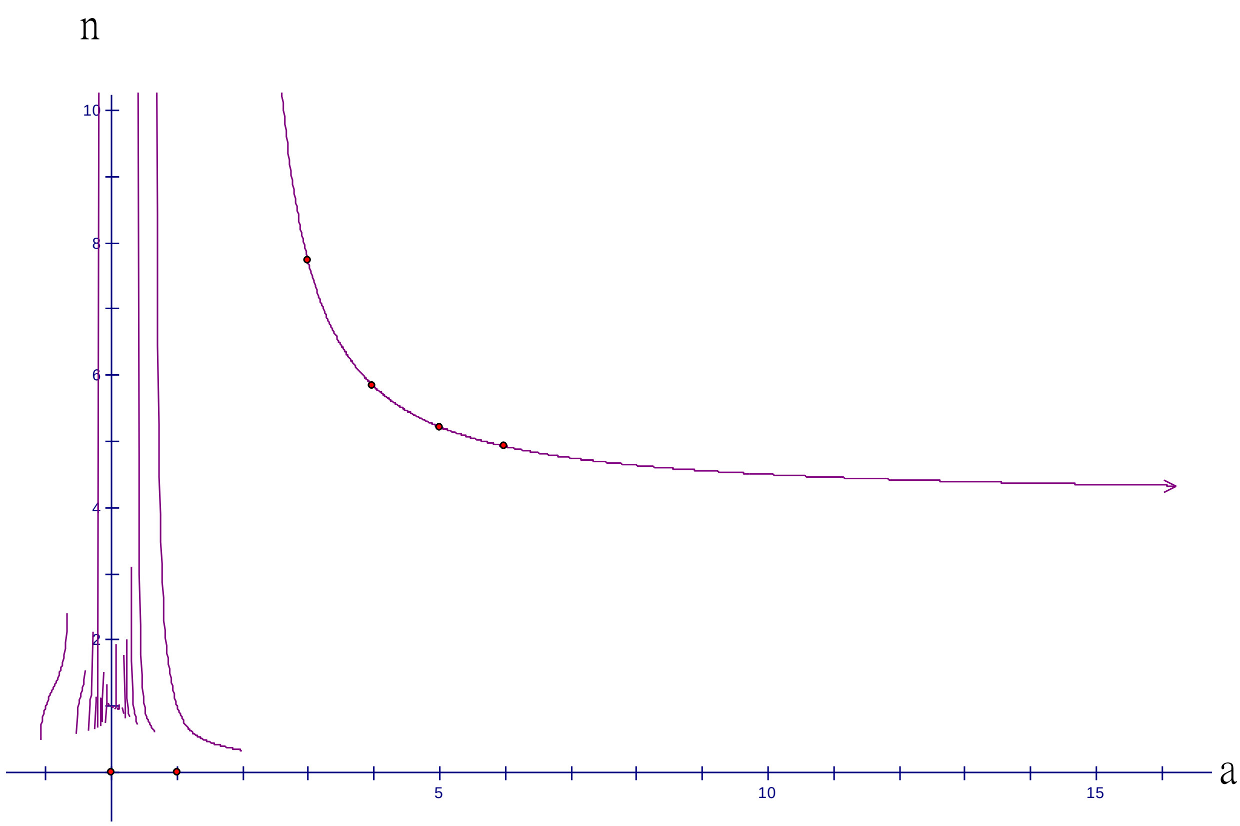
$$\tan\frac{180^\circ}{a}(an+n-1)=n^2-n$$

$$\tan\frac{180^\circ}{a}an+\tan\frac{180^\circ}{a}n-\tan\frac{180^\circ}{a}=n^2-n$$

$$n^2-[1+(\tan\frac{180^\circ}{a}a)+\tan\frac{180^\circ}{a}]n+\tan\frac{180^\circ}{a}=0$$

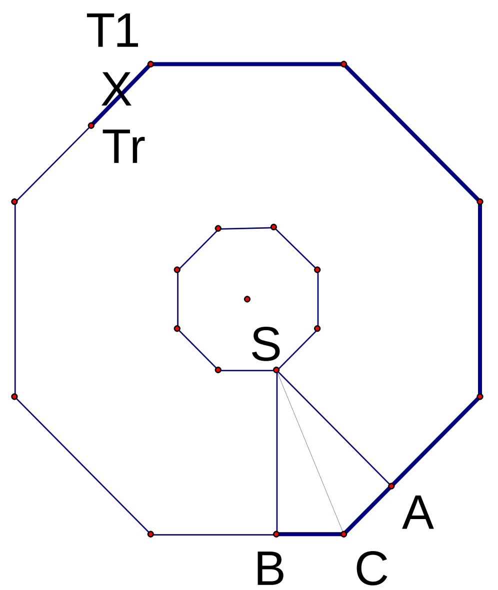
$$n=\frac{[1+(\tan\frac{180^\circ}{a})a+\tan\frac{180^\circ}{a}]+\sqrt{[1+(\tan\frac{180^\circ}{a})a+\tan\frac{180^\circ}{a}]^2-4(\tan\frac{180^\circ}{a})}}{2}$$

我們可以發現算式跟偶數邊一模一樣，所以以下討論不用區分奇數邊和偶數邊。



我們利用 GSP 把圖畫出來，發現邊數越多時，標準路徑的 n 越小。

2、路徑二(T 在頂點中點之間，S 在頂點)



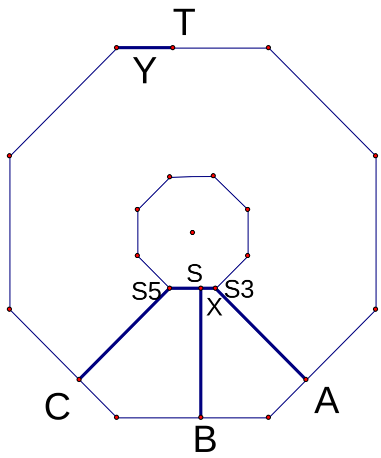
按前面的方式學生讓老師在 Tr，而透過賽局論的表格即為

	A	B
順時針	$X+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$	$X+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$
逆時針	$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-X$	$\frac{a}{2}-X-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

當順 A 和逆 B 比較長時，$X+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}>\frac{a}{2}-X-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

當順 B 和逆 A 比較長時，$X+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}>\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-X$，透過賽局論，老師會決定走逆時針，而學生就會走 A。但因為$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-X<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$，在希望盡量讓老師走遠路的狀況下，所以學生仍然會選擇標準路徑。

3、路徑三(T 在頂點中點之間，S 也在頂點中點之間)



	學生走$\overline{S5C}$老師需走的路	學生走$\overline{SB}$老師需走的路	學生走$\overline{S3A}$老師需走的路
順時針	$\frac{a}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y-1+nX$ $=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX$	$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y+X$	不可能
逆時針	不可能	$\frac{a}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+Y-X$	$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

同前面正方形的計算，順 A＞順 B，逆 C＞逆 B，

$Y>nX$時順 A＜逆 C，$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

$Y<nX$時順 A＞逆 C，$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX>\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX$

所以$Y>nX$的話老師就順時針走，$Y<nX$的話老師就逆時針走。

但若與標準路徑老師需走 $\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ 來比較，當 $Y>nX$ 時，$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-Y+nX<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$，

當 $Y<nX$ 時，$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+Y-nX<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$，所以學生會讓老師走標準路徑。

結論：(1)、邊數越多時，標準路徑的 n 越小。

(2)、對學生來說標準路徑(學生在頂點，老師在離學生最遠處)比其他位置都要好。

陸、研究結果

一、老師心中定了一個內圈，讓圈內和圈外各有各的規則，使標準路徑的 n 約為 5.828，而我們優化標準路徑後的 n 大約為 5.9。

二、老師在岸邊的其他任意位置，學生在小正方形的其他任意位置，所得出的 n 都小於標準路徑，因此學生最有利的走法就是標準路徑優化後的結果 (n 約為 5.9)。

三、當擴展到正多邊形時，邊數越多標準路徑的 n 越小。

柒、未來展望

一、我們無法用解方程式的技術求出正方形優化路徑的精準值，只有 n＝5.9 的近似值。

二、其他正多邊形我們無法討論優化路徑，正 a 邊形有不只一條往遠邊的新路徑也沒有討論。

三、雖然我們研究了圓形的標準路徑，但有無限多種其他走法算不出來，這可以是以後深入探討的內容。

大圓半徑＝1

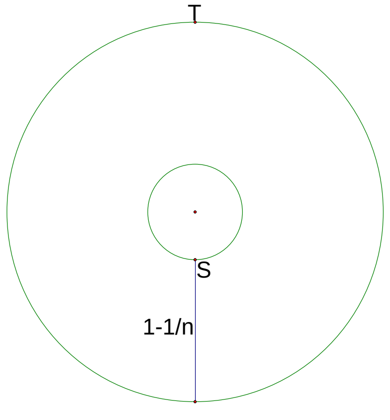
小圓半徑＝$\frac{1}{n}$

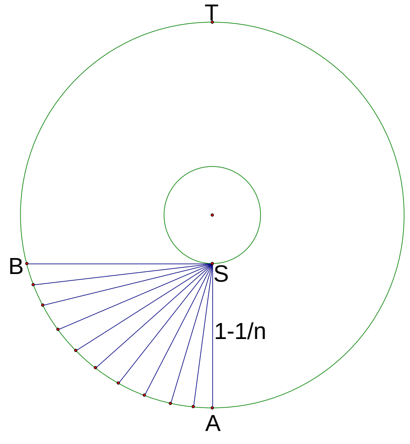
$$\frac{2\pi}{2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\times n$$

$$\pi=(n-1)$$

$$\pi+1=n$$

n 約等於4.1415

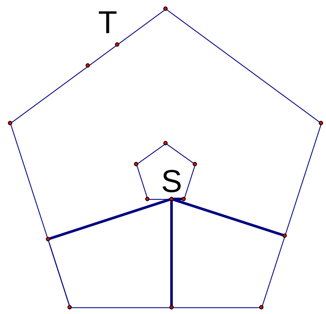




如果把圓形視為正無限多邊形，

結果也符合研究七中 a 與 n 的關係。

四、五邊形以上 T(任意)S(任意)有可能直接走較遠邊的新路徑，我們並沒有把這個可能性加入討論。



捌、參考文獻

一、陶哲軒(2011)。*陶哲軒教你聰明解數學*。臺北市：遠流出版社。

二、賴世豪、林維揚(2012)。*游泳池追逐戰*。第 52 屆全國中小學科學展覽會國中組數學科。