壹、　研究動機

有一天，我們偶然在網路上看到「印度神童數石頭」這個影片(Google 搜尋即可找到)，影片中的女孩先確認正方形外每一邊的石頭總數皆為八顆，接下來將正方形中央的石頭一個一個往外放，但是正方形外每一邊仍維持八顆石頭，沒有變多，我們反反覆覆看了好幾次，都沒有發現其中的端倪，那中間的石頭到底跑去哪裡了呢？於是我們開始徒手實際操作，一個一個去試驗，想要找到石頭消失的奧祕，並且嘗試改變其形狀(五邊形、六邊形……)以及改變他的格數(五格、六格……)，看看他們的結果是否會相同…，並找出其規律。

貳、　研究目的與研究問題

我們藉由操作找出石頭消失的祕密。並且嘗試改變不同的條件以及擺放規則，看看結果是不是會有不一樣的變化？

一、　找出石頭消失的祕密？

二、　找出四邊形-K 格，每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

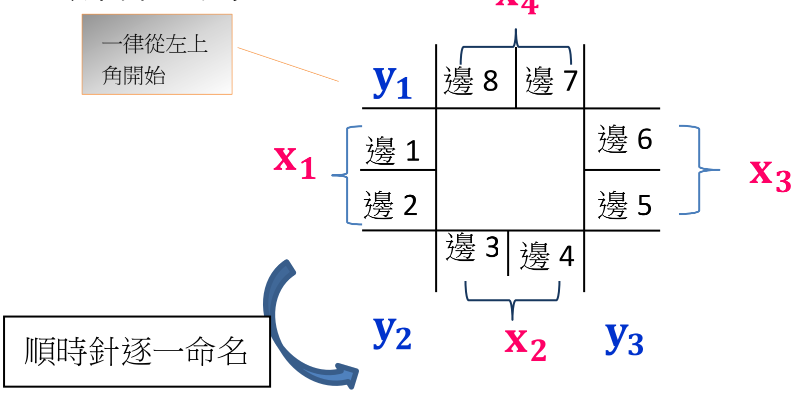
三、　找出 N 邊形-四格-每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

四、　找出 N 邊形-四格-每排 S 顆，可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

五、　找出 N 邊形-K 格-每排 8 顆，奇數格可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

六、　找出四邊形-四格-每排 S 顆，最多可放入石頭數之步數？延伸遊戲並找出規則

參、　解釋名詞



角、邊：不管是哪一個多邊形，一律從左上角開始逆時針命名，分為角和邊，如圖所示

X＝邊上的石頭總數（$x_1+x_3+x_2+x_4\cdots\cdots\cdots x_n$）

Y＝角落的石頭總數（$y_1+y_2+y_3+y_4\cdots\cdots\cdots y_n$）

T＝四邊形上所有的石頭數

S＝每排石頭的總數

K＝每邊的格數

肆、 預備知識

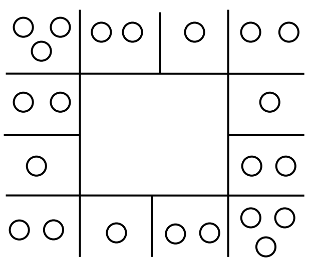
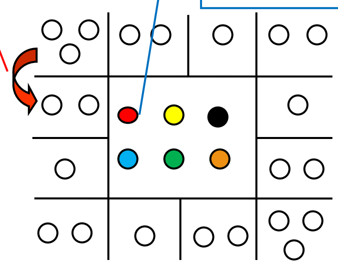
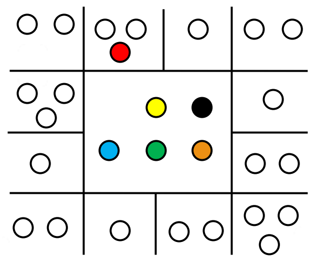
下取整函數：即為**取底符號**，在數學中一般記作$\lfloor x \rfloor$，在電腦科學中一般記作 floor(x)，表示不超過 x 的整數中最大的一個。

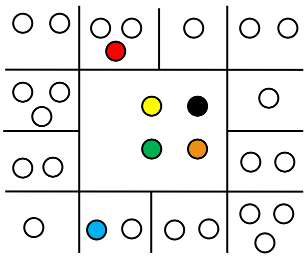
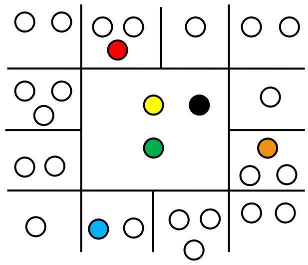
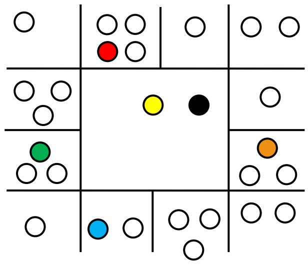
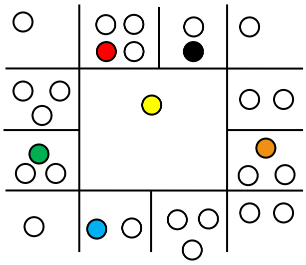
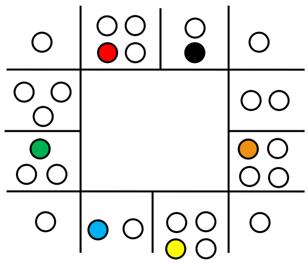
上取整函數：即為**取頂符號**在數學中一般記作$\lceil x \rceil$，在電腦科學中一般記作 ceil(x)，表示不小於 x 的整數中最小的一個。

伍、 研究過程與方法

問題一: 找出石頭消失的祕密？

影片中的女孩將中間的石頭一顆一顆的往正方形邊格上放，但是無論怎麼數，每邊的石頭總數都是八顆，中間的石頭跑到哪裡去了？為了研究石頭消失的祕密，我們仔細觀察女孩擺放和移動石頭的順序，並且記錄下來，以下表格為女孩將石頭移動的次序。

		
原圖	移動角 1 的石頭至邊 1，將紅色石頭放置邊 8	承上圖

		
移動角 2 的石頭至邊 2，將藍色石頭放置邊 3	移動角 3 的石頭至邊 4，將土色石頭放置邊 5	移動角 1 的石頭至邊 8，將綠色石頭放置邊 2
		
移動角 4 的石頭至邊 6，將黑色石頭放置邊 7	移動角 3 的石頭至邊 5，將黃色石頭放置邊 3	

一、由上表我們可以整理出以下規律

（一）、女孩每從裡面拿出一顆石頭，就會從角落移走一顆石頭至邊上。

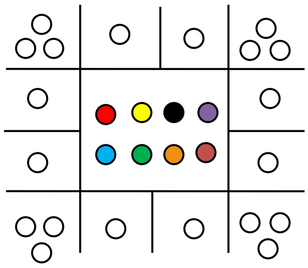
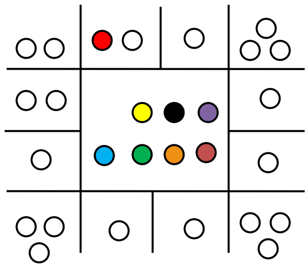
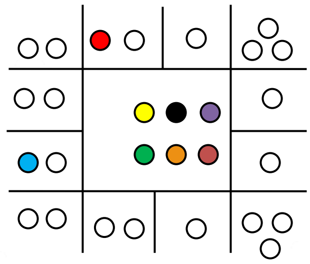
（二）、裡面的石頭全部放完之後，角落都只剩下一顆石頭。

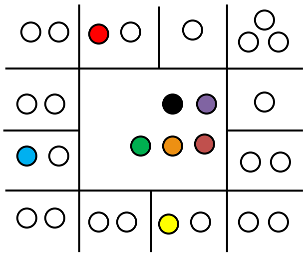
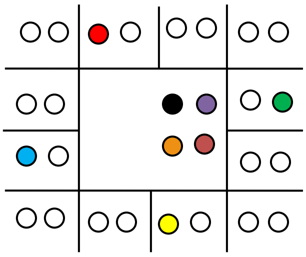
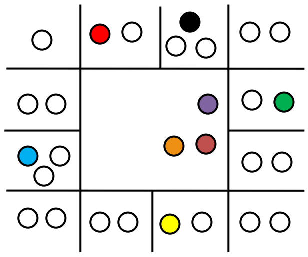
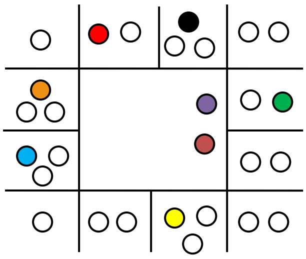
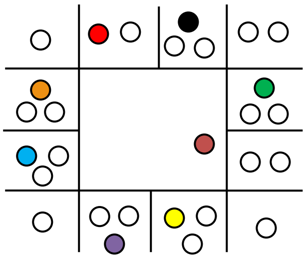
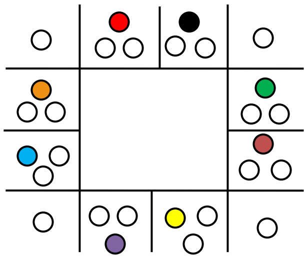
（三）、維持每個格子都至少有一個石頭且每排石頭總數都是八顆。

（四）、角落的石頭是屬於兩排共用，乍看之下好像是石頭不見了，其實是調整共用的角落石頭個數。

問題二：找出四邊形-四格，每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

根據以上影片中女孩整理的資料，我們試著改變一開始石頭擺放的位置，並維持四邊形每排石頭總數為八顆，依序將石頭從裡面（下方原圖有顏色處）取出往外（邊）放，看看最多可以放入幾個石頭？

		
原圖	移動角 1 的石頭至邊 1，將紅色石頭放置邊 8	移動角 2 的石頭至邊 3，將藍色石頭放置邊 2

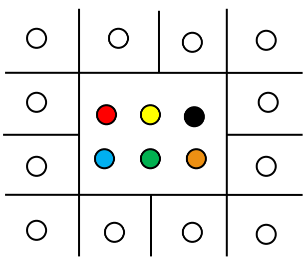
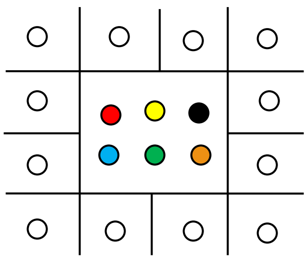
		
移動角 3 的石頭至邊 5，將黃色石頭放置邊 4	移動角 4 的石頭至邊 7，將綠色石頭放置邊 6	移動角 1 的石頭至邊 2，將黑色石頭放置邊 7
		
移動角 2 的石頭至邊 4，將土黃色石頭放置邊 1	移動角 3 的石頭至邊 6，將紫色石頭放置邊 3	移動角 4 的石頭至邊 8，將暗紅色石頭放置邊 5

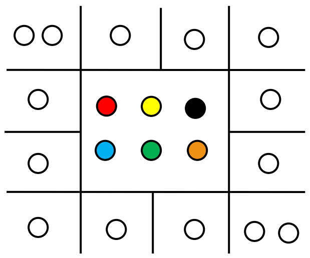
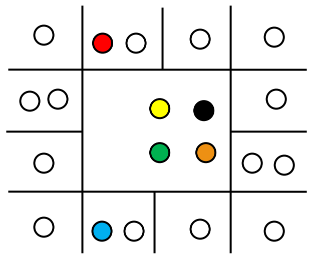
一、由上表我們可以發現

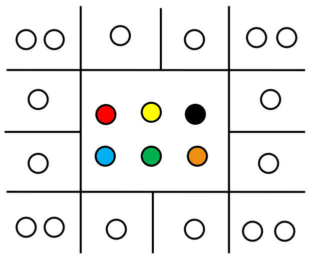
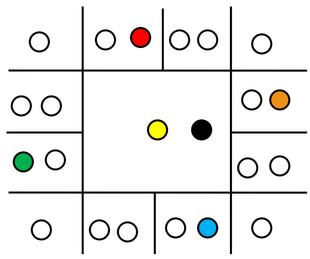
（一）、在四邊形-四格的情況下，每排維持八顆石頭且每格至少要有一顆石頭，最多放入 8 顆石頭。

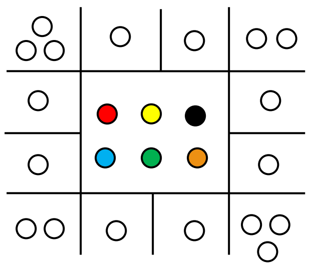
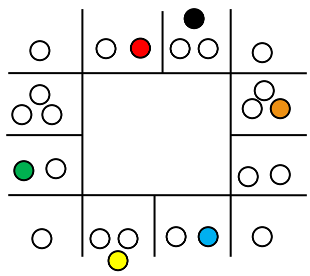
（二）、一開始在角落石頭的總和要最多，邊上的石頭數要降至最低，才能使放入地石頭總數達到最大值。

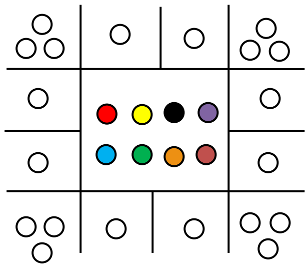
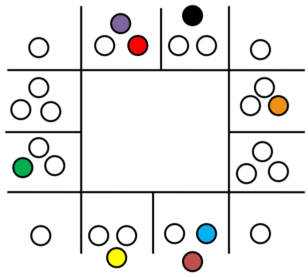
承上，我們以四邊形為主，探討四邊形-四格，依序固定每排不同的石頭總數量 S (每排四顆、每排五顆、每排六顆……)，找尋最多可放入的石頭數，以下是實際動手操作的結果：

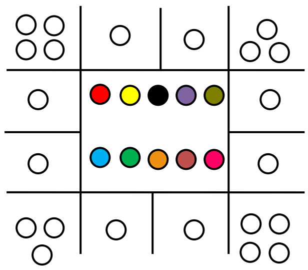
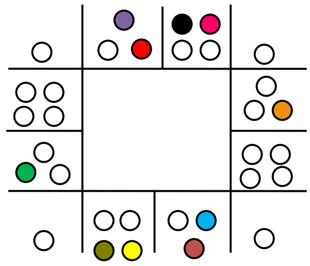
每排四顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 0	

每排五顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 2	

每排六顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 4	

每排七顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 6	

每排八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 8	

每排九顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以加入的石頭總數為 10	

二、由上表我們可以發現

（一）、在四邊形-四格的情況下，依序改變每排的石頭總數，從四顆開始，每排多一顆石頭，最多可放入的石頭數就會依序+2。

（二）、一開始在角落的石頭總數最多，邊上的石頭數要降至最低，才能使石頭放入的數量達到最大值。

（三）、依序整理四邊形-四格，改變每排不同的石頭總數，整理如下表：

四邊形-四格-每排 S 顆

每排的石頭總數(S)	石頭總數(移動前)	石頭總數(移動後)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數量
4	12	12	4	4	0
5	14	16	6	4	2
6	16	18	8	4	4
7	18	20	10	4	6
8	20	22	12	4	8
9	22	24	14	4	10
10	24	26	16	4	12

根據上表，我們做了以下整理：

【整理】

$y_1+x_1+y_2=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$y_2+x_2+y_3=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

$y_3+x_3+y_4=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

$y_4+x_4+y_1=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

①−②　$y_1-y_3=x_2-x_1\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

②−③　$y_2-y_4=x_3-x_2\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑥

③−④　$y_3-y_1=x_4-x_3\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑦

①−④　$y_2-y_4=x_4-x_1\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑧

由⑤+⑦得知　$x_2-x_1=x_3-x_4$

故　$x_1+x_3=x_2+x_4$

由①+③得知（$y_1+x_1+y_2$）＋（$y_3+x_3+y_4$）＝2S

$(x_1+x_3)+(y_1+y_2+y_3+y_4)=2S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑨

命 $Y=y_1+y_2+y_3+y_4$代入⑨

$(x_1+x_3)+Y=2S$

故 $(x_1+x_3)=2S-Y\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑩

命 T＝四邊形上所有的石頭數

所以 $T=x_1+x_3+x_2+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4$，$x_1+x_3=x_2+x_4$

$T=2(x_1+x_3)+Y\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑪

由⑩可知 $(x_1+x_3)=2S-Y$ 代入⑪

T＝2（2S－Y）＋Y

當 Y 最小(角落數皆為 1，總合為 4)，x_1+x_3最小　→　T 最大

所以命 $Y=4$ 代入⑪

→$T=2(2S-4)+4$………max(此時四邊形上石頭數最多)

由⑩可知 $Y=2S-(x_1+x_3)$代入⑪

$T=2(x_1+x_3)+2S-(x_1+x_3)$

$=(x_1+x_3)+2S\cdots\cdots\cdots$⑫

當x_1+x_3最小(邊數皆為 1，$x_1+x_3=4$)，Y 最大 → T 最小

所以命$x_1+x_3=4$ 代入⑫

→$T=4+2S$ ………min(此時四邊形上石頭數最少)

max-min＝放入最多的石頭數：$4S-4-(4+2S)=2S-8$

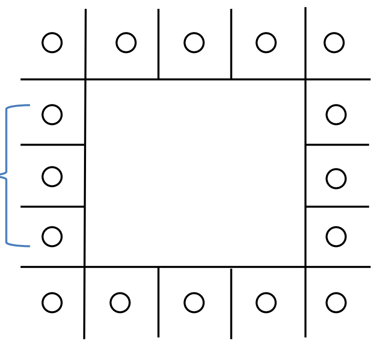
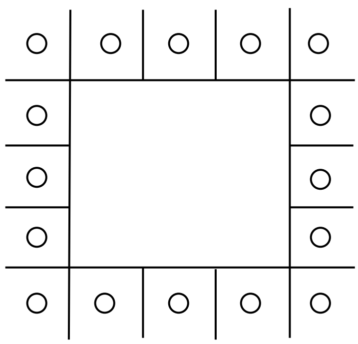
最多可放入的石頭總數 ＝ $2S-8$

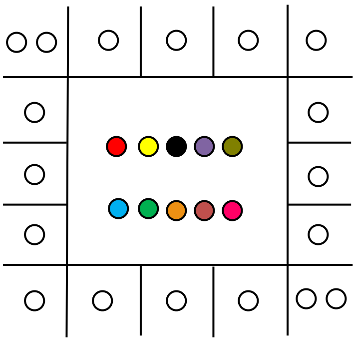
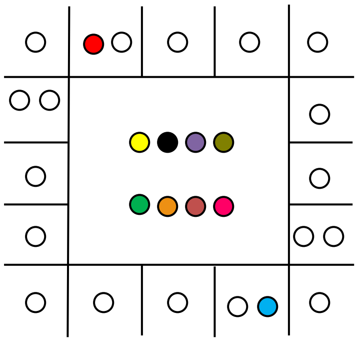
備註：$X+Y=T$

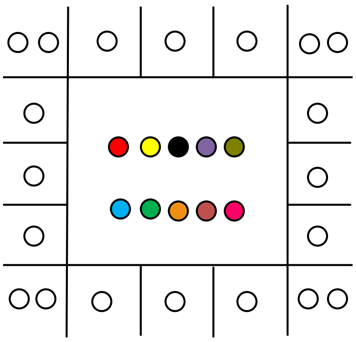
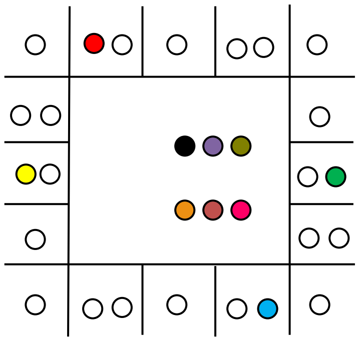
延伸

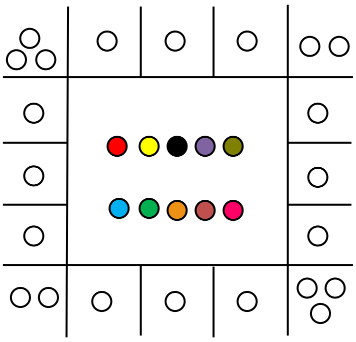
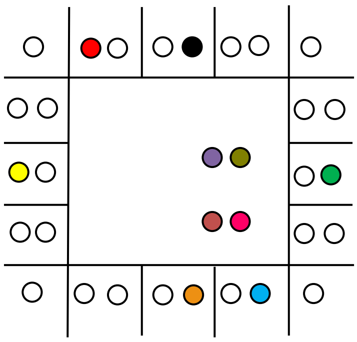
接著，我們仍以四邊形為主，但是延伸為每邊 K 格，K 指的是邊上的格數，不含角落，接下來我們依序改變每排的總石頭數，探討其可放入的石頭總數有何變化？以下是實際動手操作的結果，以四邊形-三格為例：

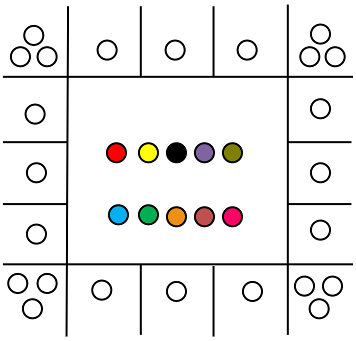
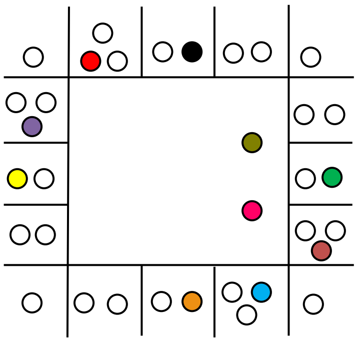
K 指的是邊上的格數,不含角落,以此題為例，其 K=3

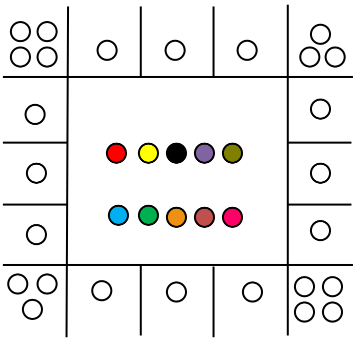
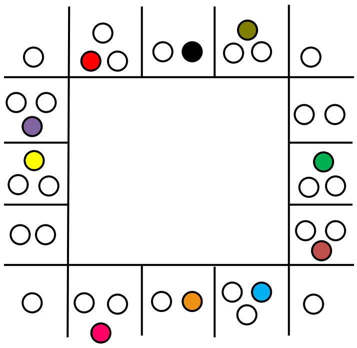
	移動前	移動後
每排五顆石頭		
	最多可以放入的石頭總數為 0	

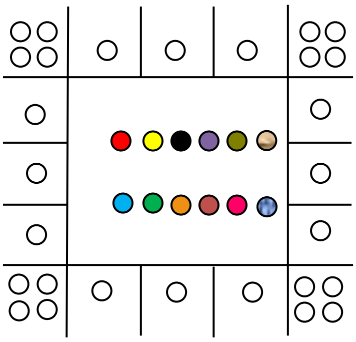
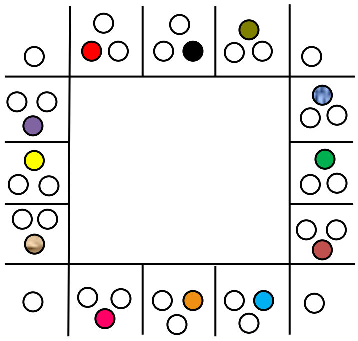
<table>
<tr><td rowspan="3">每排六顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 2</td></tr>
</table>

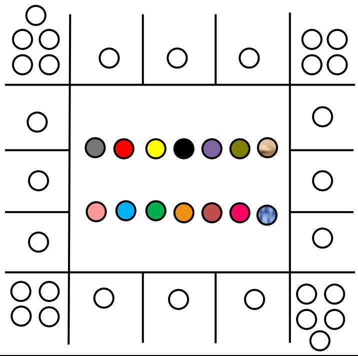
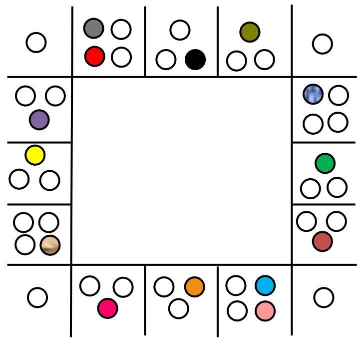
<table>
<tr><td rowspan="3">每排七顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">每排八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">每排九顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">每排十顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">每排十一顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">每
排
十
二
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 14</td></tr>
</table>

三、由以上的操作我們可以發現

（一）、在四邊形-三格的情況下，依序改變每排的石頭總數，從每排五顆開始，每排多一顆石頭，最多可放入的石頭數就會依序+2。

（二）、一開始在角落的石頭總數最多，邊上的石頭數要降至最少，才能使石頭放入的數量達到最大值。

（三）、整理四邊形-三格，依序改變每排不同的石頭總數，整理成下表：

四邊形-三格

每排的石頭數(S)	石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數量
5	16	4	4	16	0
6	18	6	4	20	2
7	20	8	4	24	4
8	22	10	4	28	6
9	24	12	4	32	8
10	26	14	4	36	10
11	28	16	4	40	12

（四）、接著我們依序整理四邊形-四格、四邊形-五格、四邊形-K 格…並依序改變每排的石頭數，記錄成下表。

四邊形-四格

每排的石頭數(S)	石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數量
6	20	4	4	20	0
7	22	6	4	24	2
8	24	8	4	28	4
9	26	10	4	32	6
10	28	12	4	36	8

11	30	14	4	40	10
12	32	16	4	44	12

四邊形-五格

每排的石頭數(S)	石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數量
7	24	4	4	24	0
8	26	6	4	28	2
9	28	8	4	32	4
10	30	10	4	36	6
11	32	12	4	40	8
12	34	14	4	44	10
13	36	16	4	48	12

四邊形-K 格

每排的石頭數(S)	石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數量
K+2	4K+4	K	4	4K+4	0
K+3	4K+6	K+2	4	4K+8	2
K+4	4K+8	K+4	4	4K+12	4
K+5	4K+10	K+6	4	4K+16	6
K+6	4K+12	K+8	4	4K+20	8
K+7	4K+14	K+10	4	4K+24	10
K+8	4K+16	K+12	4	4K+28	12

【整理】

$y_1 + x_1 + y_2 = S \cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$y_2 + x_2 + y_3 = S \cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

$y_3 + x_3 + y_4 = S \cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

$y_4 + x_4 + y_1 = S \cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

①−②　$y_1 - y_3 = x_2 - x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

②−③　$y_2 - y_4 = x_3 - x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑥

③−④　$y_3 - y_1 = x_4 - x_3 \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑦

①−④　　$y_2 - y_4 = x_4 - x_1$⋯⋯⋯⋯⑧

由⑤+⑦得知　　$x_2 - x_1 = x_3 - x_4$

故　$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$

由①+③得知（$y_1 + x_1 + y_2$）＋（$y_3 + x_3 + y_4$）＝2S

$(x_1 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2S$⋯⋯⋯⋯⑨

命 $Y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$代入⑨

$(x_1 + x_3) + Y = 2S$

$(x_1 + x_3) = 2S - Y$⋯⋯⋯⋯⑩

命 T＝四邊形上所有的石頭數

所以 $T = x_1 + x_3 + x_2 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

$T = 2(x_1 + x_3) + Y$⋯⋯⋯⋯⑪

由⑩可知 $(x_1 + x_3) = 2S - Y$ 代入⑪

$T = 2(2S - Y) + Y$

當 Y 最小(角落數皆為 1，總合為 4)，$x_1 + x_3$最小　→　T 最大

所以命 Y＝4 代入⑪

$\rightarrow T = 2(2S - 4) + 4$

　　$= 4S - 4$⋯⋯⋯max(此時四邊形上石頭數最多)

由⑩可知 $Y = 2S - (x_1 + x_3)$代入⑪

$T = 2(x_1 + x_3) + 2S - (x_1 + x_3)$

　$= (x_1 + x_3) + 2S$⋯⋯⋯⑫

當$x_1 + x_3$最小，Y 最大　→　T 最小

命每邊分為 K 格，所以$x_1 = K-2$，$x_3 = K-2$，代入$x_1 + x_3$

將$x_1 + x_3 = 2K-4$ 代入⑫

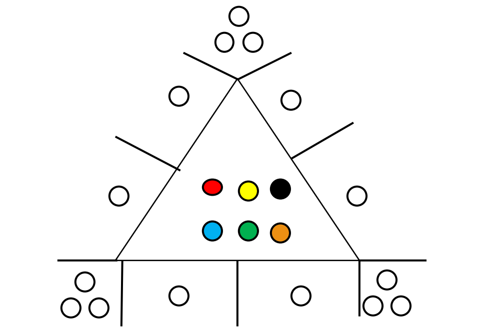
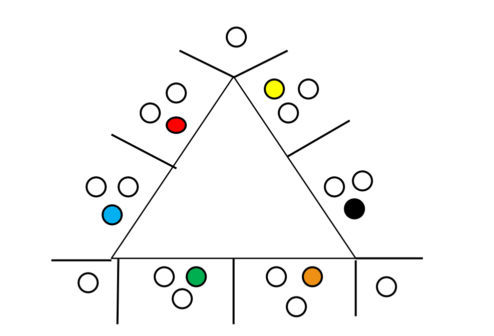
$T = 2K - 4 + 2S$ ⋯⋯⋯min(此時四邊形上石頭數最少)

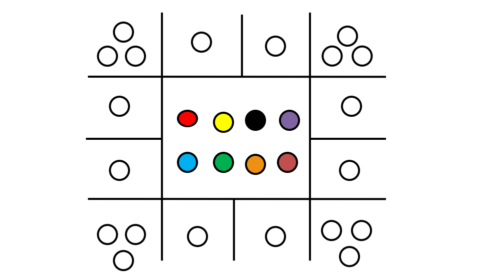
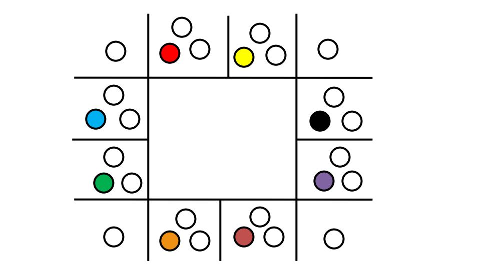
max-min＝放入最多的石頭數：$4S - 4 - (2K - 4 + 2S) = 2S - 2K$

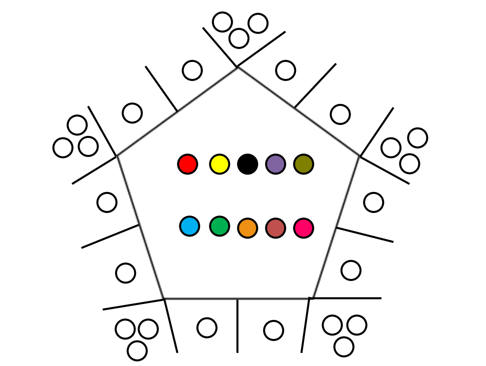
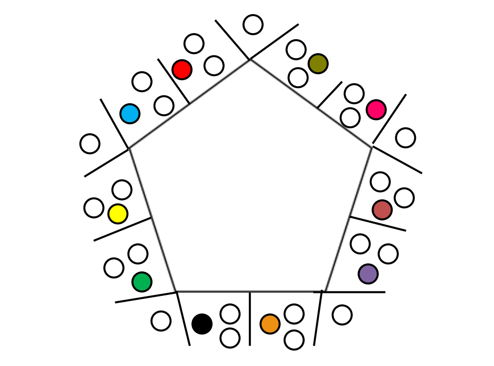
最多可放入的石頭總數 ＝ 2S- 2(K+2)

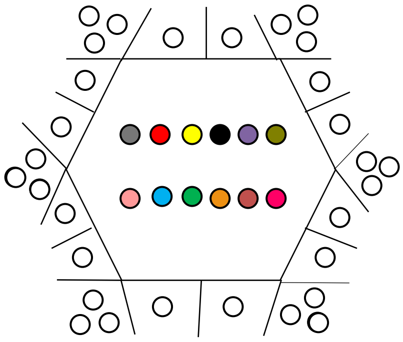
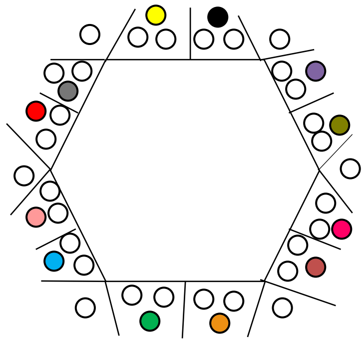
問題三: 找出 N 邊形-四格-每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

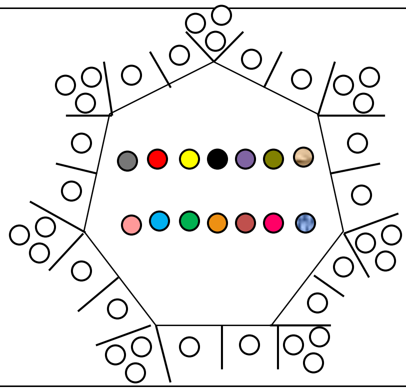
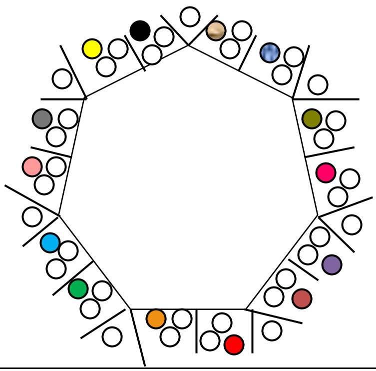
我們試圖改變四邊形為其他的多邊形(五邊形、六邊形、七邊形……)，並依序改變每排的總石頭數，探討其可放入的石頭總數有何變化？以下是實際動手操作的結果（以 N 邊形且每排八顆為例）：

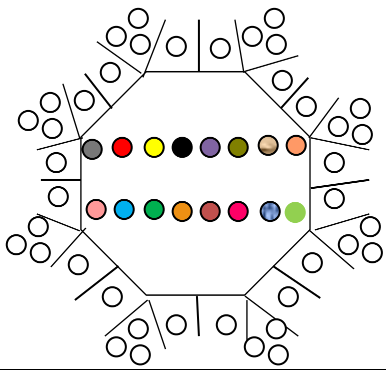
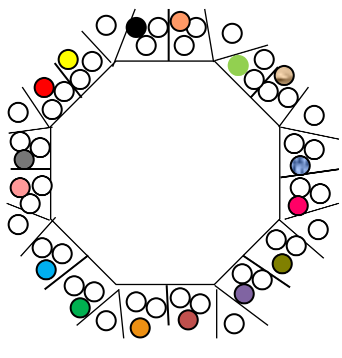
三角形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 6	

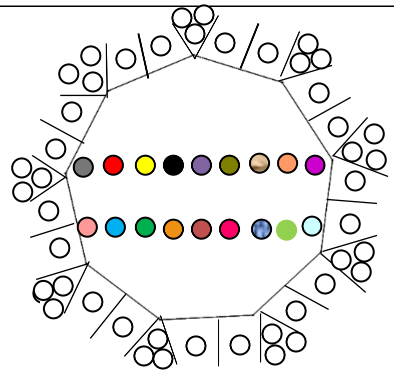
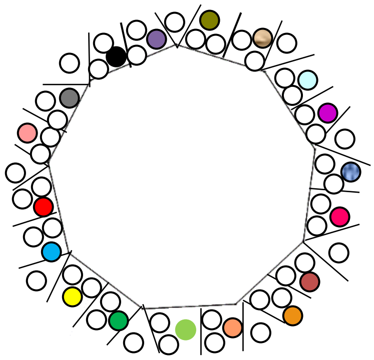
四邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 8	

五邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 10	

<table>
<tr><td rowspan="3">六
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">七
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">八
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 16</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">九
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 18</td></tr>
</table>

一、由以上操作我們可以發現

（一）、改變為多邊形後，在 N 邊形-四格且每排八顆的情況下，從三角形開始，每多一邊，最多可放入的石頭數就會依序+2。

（二）、一開始在角落的石頭總數最多，邊上的石頭數要降至最少，才能使石頭放入的數量達到最大值。

（三）、整理 N 邊形-四格，依序改變每排不同的石頭總數，將實際操作整理如下表：

N 邊形-四格

N 邊形	每排的石頭數	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動前)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數
三角形	8	9	3	15	21	6
四邊形	8	12	4	20	28	8
五邊形	8	15	5	25	35	10
六邊形	8	18	6	30	42	12
七邊形	8	21	7	35	49	14
八邊形	8	24	8	40	56	16
九邊形	8	27	9	45	63	18
十邊形	8	30	10	50	70	20

【整理】

$y_1 + x_1 + y_2 = S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$y_2 + x_2 + y_3 = S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

$y_3 + x_3 + y_4 = S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

$y_4 + x_4 + y_1 = S \cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

假設全部有 N 邊形，則上述可以寫出 N 個相似的式子

將所有式子相加得出

$(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots\cdots\cdots) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots\ldots) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots\cdots\cdots) = NS \cdots\cdots\cdots..$ ⑤

命 $Y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \cdots\cdots$，$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \cdots\cdots\cdots$ 代入⑤

$X + 2Y = NS \cdots\cdots\cdots$ ⑥

且將 $X + Y = T$ 代入⑥

$T + Y = NS \cdots\cdots$ ⑦

當 Y=N 時 → T 最大 (亦即重複石頭數最少，總石頭數可以最大)

所以命 Y=N 代入⑥

$X + 2N = NS$，$X = NS - 2N$

將 Y=N，$X = NS - 2N$，代入 $X + Y = T$ → T 最大

$NS - 2N + N = T$

NS-N=T⋯ max(此時石頭數最多)

當 $X = 2N$ 時 → T 最小

將 $X = 2N$ 代入⑥

$2N + 2Y = NS$

$Y = \frac{NS-2N}{2}$

將 $X = 2n$，$Y = \frac{NS-2N}{2}$ 代入 $X + Y = T$

$2N + \frac{NS-2N}{2} = T \cdots\cdots\cdots$ min(此時石頭數最少)

max-min＝放入最多的石頭數：$NS - N - \left(2N + \frac{NS-2N}{2}\right) = \frac{N}{2}S - 2N$

最多可放入的石頭總數 $= \frac{N}{2}S - 2N$

★當 NS 為奇數，則

$X = 2N+1$ 時 $\rightarrow$ T 最小

將 $X = 2N+1$ 代入⑥

$2N+1+2Y=NS \rightarrow Y=\frac{NS-2N-1}{2}$

將 $X = 2n+1$，$Y=\frac{NS-2N-1}{2}$ 代入 $X+Y=T$

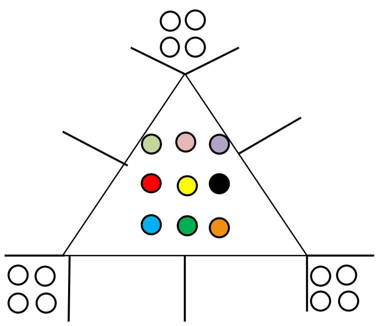
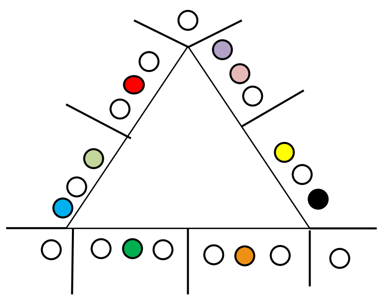
$2N+1+\frac{NS-2N-1}{2}=T\cdots\cdots\cdots$ min(此時石頭數最少)

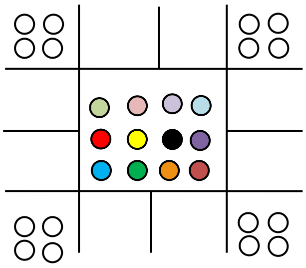
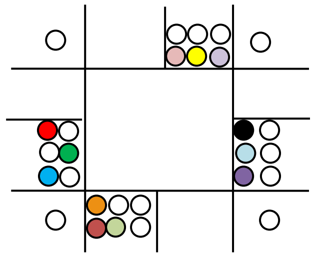
max-min＝放入最多的石頭數：$NS-N-\left(2N+1+\frac{NS-2N-1}{2}\right)=\frac{(NS-1)}{2}-2N$

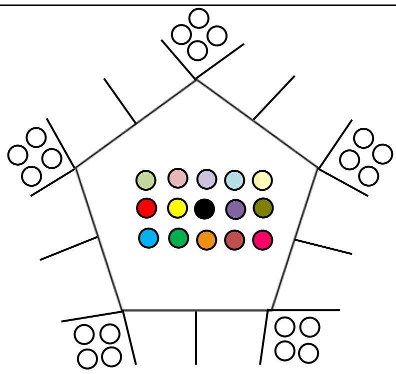
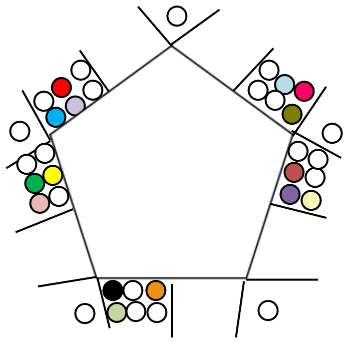
最多可放入的石頭總數 $=\frac{(NS-1)}{2}-2N$

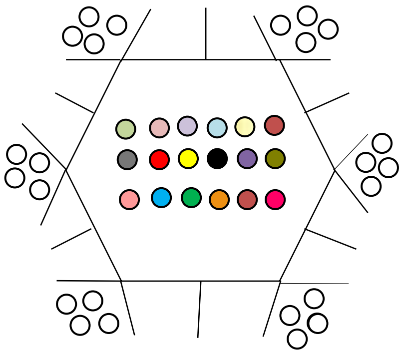
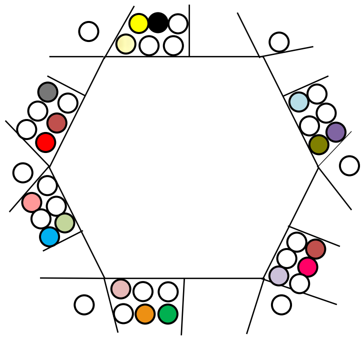
問題四: 找出 N 邊形-四格，每排 S 顆，邊上可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

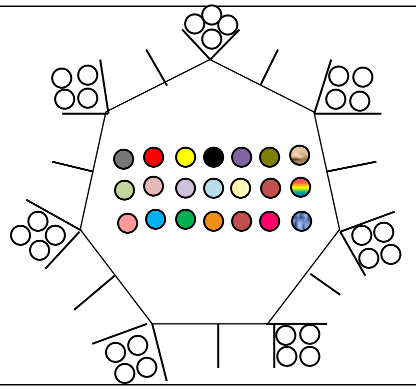
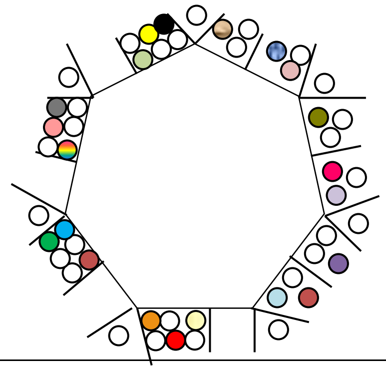
我們試圖改變四邊形為其他的多邊形(五邊形、六邊形、七邊形……)，並且允許可以有空格的情況，依序改變每排的總石頭數，探討其可放入的石頭總數有何變化？以下是實際動手操作的結果（以 N 邊形且每排八顆為例）：

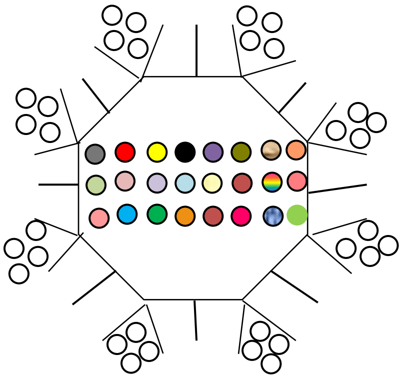
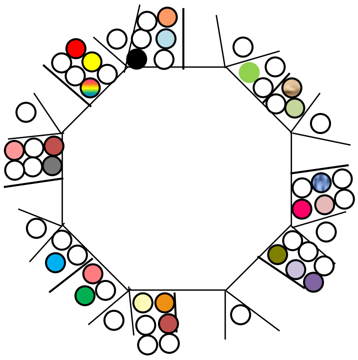
三邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 9	

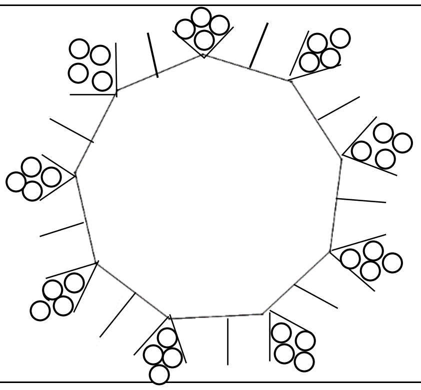
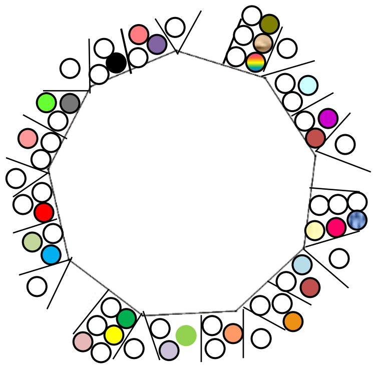
四邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 12	

五邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 15	

六邊形八顆石頭	移動前	移動後
		
	最多可以放入的石頭總數為 18	

<table>
<tr><td rowspan="3">七邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 21</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">八邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 24</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">九邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 27</td></tr>
</table>

一、由以上操作我們可以發現

（一）、在 N 邊形-四格，每排 8 顆，依序改變其邊形數，從三角形開始，每邊多一邊，最多可放入的石頭數會依序+3。

（二）、一開始在角落的石頭總數最多，邊上的石頭數要降至最少，才能使放入的石頭數量達到最大。

（三）、依序整理 N 邊形-四格，每排 8 顆，依序改變每排石頭總數，我們將結果整理如下表：

N 邊形-四格，每排 8 顆(可以有空格)

N 邊形	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動前)	石頭總數(移動後)	最多可移動的石頭數量
三邊形	12	3	12	21	9
四邊形	16	4	16	28	12
五邊形	20	5	20	35	15
六邊形	24	6	24	42	18
七邊形	28	7	28	49	21
八邊形	32	8	32	56	24
九邊形	36	9	36	63	27

【整理】

$y_1+x_1+y_2=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$y_2+x_2+y_3=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

$y_3+x_3+y_4=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

$y_4+x_4+y_1=S\cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

假設有 N 邊形，則上述可以寫出 N 個相似的式子，將所有式子相加得出

$(y_1+y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots\cdots)+(x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots\ldots)+(y_1+y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots\cdots)=NS\cdots\cdots\cdots..$ ⑤

命 $Y=y_1+y_2+y_3+y_4\cdots\cdots$，$X=x_1+x_2+x_3+x_4\cdots\cdots\cdots$ 代入⑤

$X+2Y=NS\cdots\cdots\cdots$ ⑥ 且 $X+Y=T$ 代入⑥

$T+Y=NS\cdots\cdots$ ⑦

當 Y=N 時　→　T 最大

由⑥知此時 X= NS -2N

所以 N+ NS -2N= T⋯ max(此時石頭數最多)

當 $X = 0$時　→　T 最小

NS/2= T⋯⋯⋯min(此時石頭數最少)

$(NS - N) - (NS/2) = \frac{N}{2}S - N$

max-min＝最多可放入的石頭總數 $= \frac{N}{2}S - N$

★當 NS 為奇數，則

$X = 1$ 時　→　T 最小

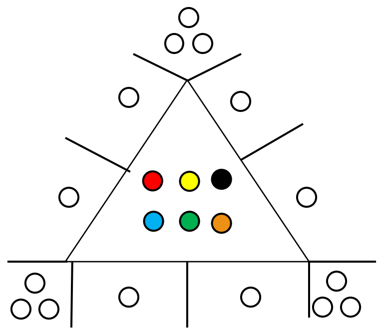
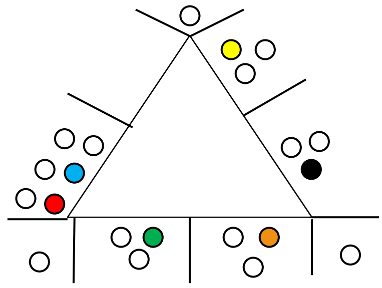
$\frac{(NS+1)}{2} = T$⋯⋯⋯min(此時石頭數最少)

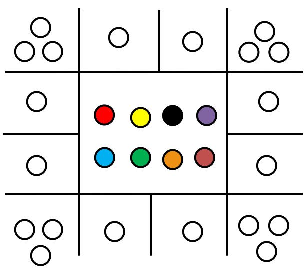
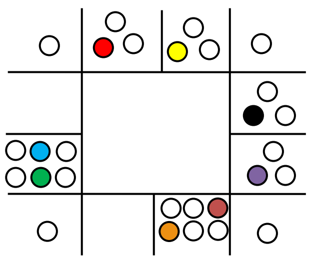
max-min＝放入最多的石頭數 $= (NS - N) - (\frac{(NS+1)}{2}) = \frac{(NS-1)}{2} - N$

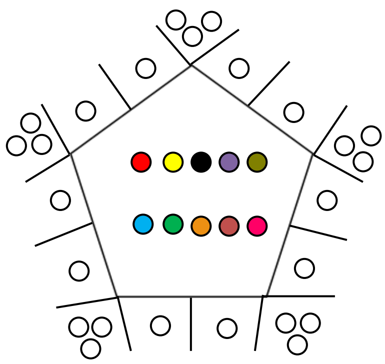
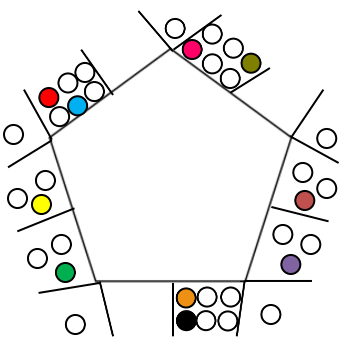
最多可放入的石頭總數 $= \frac{(NS-1)}{2} - N$

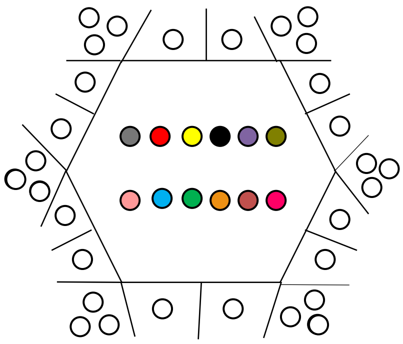
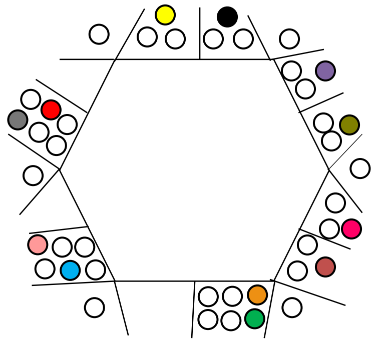
問題五: 找出 N 邊形-K 格，每排 S 顆，奇數格可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

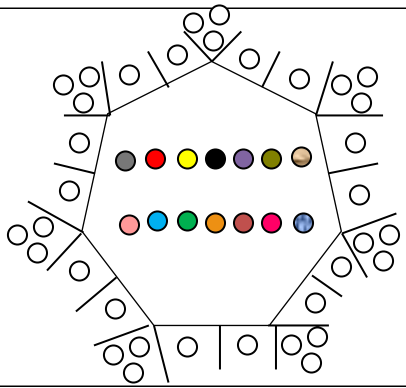
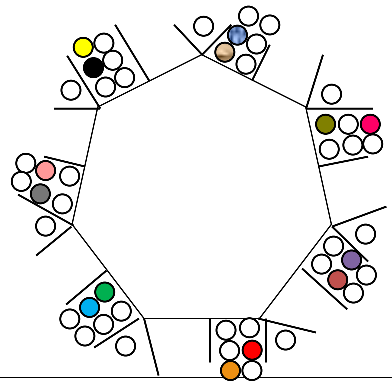
我們試圖改變四邊形為其他的多邊形(N)，並依序改變每排的總石頭數(S)以及格數(K)。同第 2 頁定義，左上角開始，逆時針命名的邊數名，可以分奇數跟偶數號碼。如果允許奇數可以為空，探討其可放入的石頭總數有何變化？以下是實際動手操作的結果（以 N 邊形且每排八顆為例）：

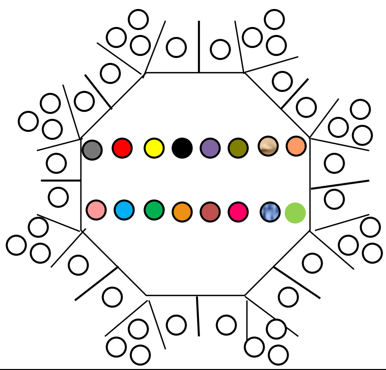
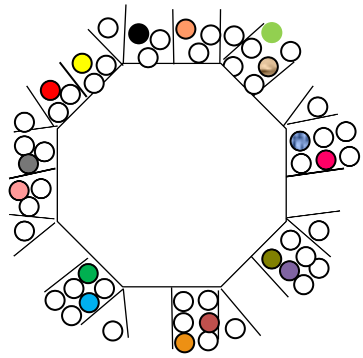
<table>
<tr><td rowspan="3">三
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 6</td></tr>
</table>

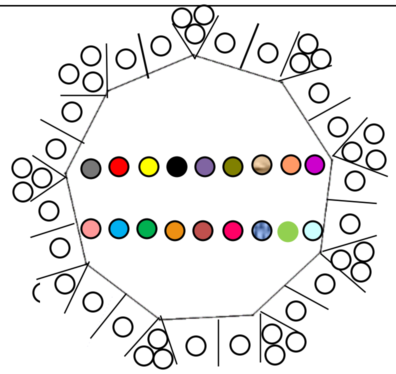
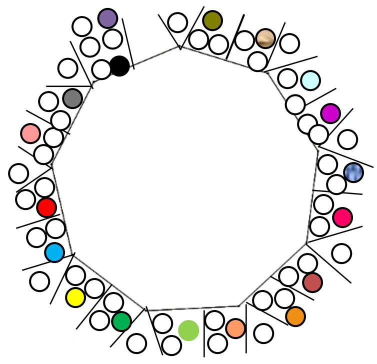
<table>
<tr><td rowspan="3">四
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">五
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">六邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">七邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">八邊形八顆石頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 16</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">九
邊
形
八
顆
石
頭</td><td>移動前</td><td>移動後</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">最多可以放入的石頭總數為 18</td></tr>
</table>

一、由以上操作我們可以發現

（一）、在 N 邊形-四格且奇數格可以有空格的情況下，要先符合各排石頭數為 S，因為偶數格必須至少有一個石頭，若以格子 1 的邊開始起算，我們可以以兩個邊為一組，每組會有 K 個石頭，因此數量為$\left[\frac{N}{2}\right] * K$； 因為是奇數邊，所以我們先讓最後一個邊放一顆石頭。

（二）、當我們從格子一開始安排石頭，y_1的值會影響到y_2，依此類推前一個角落的值都會影響到之後角落數石頭數的值，當y_1設為$\left[\frac{N}{2}\right]$，則y_n為 1，因此X_n為 S-($\left[\frac{N}{2}\right] + 1$)。

（三）、依序整理 N 邊形-四格且奇數格可以有空格，依序改變其多邊形，將結果整理如下表：

N 邊形-四格且奇數格可以有空格

N 邊形	每排的石頭數(S)	角落石頭總數(移動前)	角落石頭總數(移動後)	石頭總數(移動前)	石頭總數(移動後)	最多可放入的石頭數
三角形	8	9	3	15	21	6
四邊形	8	12	4	20	28	8
五邊形	8	15	5	25	35	10
六邊形	8	18	6	30	42	12
七邊形	8	21	7	35	49	14
八邊形	8	24	8	40	56	16
九邊形	8	27	9	45	63	18
十邊形	8	30	10	50	70	20

【整理】

$y_1+x_1+y_2=S$………①

$y_2+x_2+y_3=S$………②

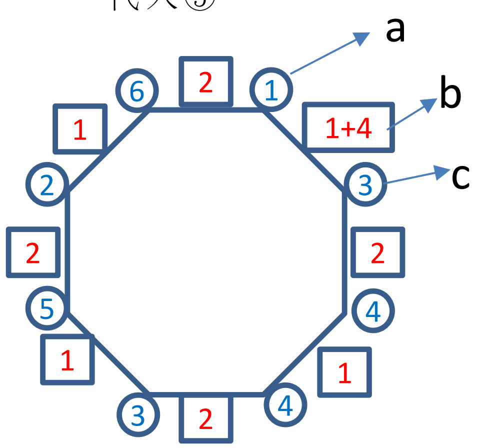
$y_3+x_3+y_4=S$………③

$y_4+x_4+y_1=S$………④

⋮　⋮　⋮　⋮

假設有 N 邊形，則上述可以寫出 N 個相似的式子，將所有式子相加得出（$y_1+y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots\cdots$）+（$x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots\ldots$）+（$y_1+y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots\cdots$）$=NS\cdots\cdots\cdots..$ ⑤

命 $Y=y_1+y_2+y_3+y_4\cdots\cdots$，$X=x_1+x_2+x_3+x_4\cdots\cdots\cdots$代入⑤



$X+2Y=NS\cdots\cdots\cdots$⑥

且 $X+Y=T$ 代入⑥

$T+Y=NS\cdots\cdots$⑦

當 Y=N 時 → T 最大(亦即重複石頭數最少，總石頭數可以達到最大)

所以命 Y=N 代入⑥

$X+2N=NS \longrightarrow X=NS-2N$

將 $Y=N$，$X=NS-2N$代入⑦

$N+NS-2N=T\cdots$ max(石頭數最多)

★當 NK 為偶數

則 $X=\left[\frac{N}{2}\right]\times K+S-1-\left[\frac{k}{2}\right]-(S-\left[\frac{k}{2}\right]-1-\frac{N}{2}+1)$時 → T 最小

PS：此處 K 為每邊的格子數(扣除角)，$\left[\frac{N}{2}\right]\times K$代表 K 格共有$\left[\frac{N}{2}\right]$組至少要放一顆石子，$S-1-\left[\frac{k}{2}\right]$ 代表每邊 S 個石頭，扣除最後一個角落石頭數(如右圖的 a)與一個邊至少的石頭數(如右圖 b 中的 1)。$(S-\left[\frac{k}{2}\right]-1-\frac{N}{2}+1)$代表的是另一個角落石子數(上圖的 c)，算法為每邊石頭數 $S-\left[\frac{k}{2}\right]$(代表邊的最少的石頭數

的較大值，如上圖的紅色 2)，以上圖做說明，S-$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$-1 就可得到 6，代表最大的角落石子數，接著減掉$\frac{N}{2}$+1，則可以一角落數值，如上圖的 c，也就是 3。因此 X=4×3+4=16 為最少的 X 值狀況。$X=\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+S-1-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-(S-\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-1-\frac{N}{2}+1)$

可化簡為 $X=\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K-1-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+\frac{N}{2}$

其中當 K 為奇數時，則 $X=\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+\frac{N}{2}$ ；

從⑥可以得知 $X+2Y=NS$ → $2Y=NS-X$ → $Y=\frac{NS-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K-\frac{N}{2}}{2}$ ，代入

Y+X=T ，所以 $\frac{NS-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K-\frac{N}{2}}{2}+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+\frac{N}{2}=\frac{NS}{2}+\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+\frac{N}{4}=T\cdots\cdots\cdots$ min(此時石頭數最少)

max-min＝放入最多的石頭數=$(NS-N)-(\frac{NS}{2}+\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times \mathbf{K}+\frac{N}{4})=\frac{\mathbf{NS}}{2}-\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times \mathbf{K}+\frac{5N}{4}$

最多可放入的石頭總數 = $\frac{\mathbf{NS}}{2}-\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times \mathbf{K}+\frac{5N}{4}$

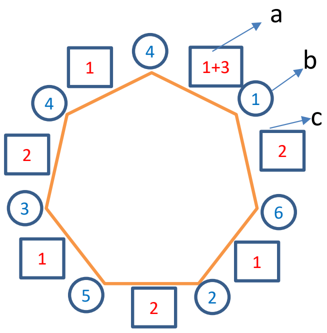
其中當 K 為偶數時，則 $X=\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+\frac{N}{2}-1$，

同理，可算出當沒有限制時最多可放入的石頭總數 = $\frac{NS}{2}-\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K+\frac{5N}{4}-\frac{1}{2}$

★當 NK 為奇數且限制奇數格可為空格

則 $X=S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K$時 → T 最小，此處 K 為每邊的格子數(扣除角)，原因如 P.26 的(一)與(二)。

以右圖做說明，S 設為 9，N 為 7，$\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil$則為 4，$\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K$ 即 3×3 = 9，因此右圖的 X 最小值為 13。



從⑥可以得知 $X+2Y=NS$ → $Y=\frac{(NS-X)}{2}$ →

$Y=\frac{1}{2}(NS-\left(S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K\right))$

代入 Y+X=T

所以$\frac{1}{2}(NS+\left(S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K\right))=T\cdots\cdots\cdots$ min(此時石頭數最少)

max-min=放入的石頭數最多=$(NS-N)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{NS}+\left(\mathbf{S}-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times \mathbf{K}\right)\right)$

最多可放入的石頭總數 $=(NS-N)-\frac{1}{2}\left(NS+\left(S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K\right)\right)$

【類推】

限制為**偶數格**可為空格，則相同的，$X=S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K$

可以算出 N 邊形-K 格，每邊 S 顆，偶數格可以有空格，最多可放入石頭數的規律為

$(NS-N)-\frac{1}{2}\left(NS+\left(S-(\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil+1)+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\times K\right)\right)$

【補充】

一、 問題五的研究過程中，我們也發現了奇數或偶數格的限制要能成立必須在兩個先決條件成立下，分別是 1.$K\leq\left\lfloor\frac{S}{2}\right\rfloor$ 2.$N\leq S$

二、 原因是 1.K 若大於$\left\lfloor\frac{S}{2}\right\rfloor$，則無法滿足每邊都是 S 個石頭。2.當 N>S 的時候，只能有部分的邊合起來是 S 個石頭。

問題六: 找出四邊形-四格，每排 S 顆，最多可放入石頭數之步數？

我們試圖將以上研究變成遊戲，在生活當中，只要幾顆石頭，就能進行遊戲。首先我們將最多可以放入的石頭數之步數整理如下，接著加入遊戲規則，就是一場妙趣橫生的遊戲了。

四邊形-四格		N 邊形-四格，每邊 8 顆(可以有空格		四邊形-六格	
每排石頭數(S)	最少步數	N 邊形	最少步數	每排的石頭數(S)	最少步數
4	0	三邊形	9	6	0
5	2	四邊形	12	7	2
6	4	五邊形	15	8	4
7	6	六邊形	18	9	6
8	8	七邊形	21	10	8
9	10	八邊形	24	11	10
10	12	九邊形	27	12	12

一、由以上操作，我們可以制定遊戲規則如下：

（一）、人數 2~3 人
（二）、決定邊形數格數顆數
（三）、猜拳決定誰先誰後
（四）、一次走 1~2 步
（五）、限制每格最多三顆石頭
（六）、所有的格數都要先放完才可以進行第二顆，依此類推
（七）、都沒有辦法移動石頭者為輸家

★★★由子題二到子題六，我們可以比較容易地容易算出對手所剩的石頭數與步數，勝率也會比較高。

陸、 結論

一、 找出石頭消失的祕密？

石頭並非真的消失，角落的石頭是屬於兩邊共用，乍看之下好像是石頭不見了，其實是調整共用的角落石頭個數。

二、 找出四邊形-K 格，每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

最多可放入的石頭總數 = 2S- 2(K+2)

三、 找出 N 邊形-四格-每排 S 顆，不可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

最多可放入的石頭總數 $= \frac{N}{2}S - 2N$

註：當 NS 為奇數，則最多可放入的石頭總數 $= \frac{(NS-1)}{2} - 2N$

四、 找出 N 邊形-四格-每排 S 顆，可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

最多可放入的石頭總數 $= \frac{N}{2}S - N$

註：當 NS 為奇數，則最多可放入的石頭總數 $= \frac{(NS-1)}{2} - N$

五、 找出 N 邊形-K 格-每排 8 顆，奇數格可以有空格，最多可放入石頭數的規律？

（一）當 NK 為偶數

K 為奇數：最多可放入的石頭總數 $= \mathbf{\frac{NS}{2} - \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor \times K + \frac{5N}{4}}$

K 為偶數：最多可放入的石頭總數 $= \frac{NS}{2} - \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor \times K + \frac{5N}{4} - \frac{1}{2}$

（二）當 NK 為奇數最多可放入的石頭總數 $= (NS - N) - \frac{1}{2}\left(NS + \left(S - (\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil + 1) + \left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor \times K\right)\right)$

類推 N 邊形-K 格-每排 8 顆，奇數格可以有空格，最多可放入石頭數的規律

$(NS - N) - \frac{1}{2}\left(NS + \left(S - (\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil + 1) + \left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor \times K\right)\right)$

六、 找出四邊形-四格-每排 S 顆，最多可放入石頭數之步數？

我們依這個題目的特性延伸出遊戲規則。

柒、 心得與感想

從小看著科展團隊的學長姊們站在台上威風的向大家報告研究的內容，內心就崇拜不已，期許自己有一天也能像他們一樣，經過不斷的努力，我終於在激烈的校內科學競賽脫穎而出，加入了數學科展這個團隊，展開將近一年的研究歷程，我們學會了如何發現問題、解決問題、驗證答案。雖然過程中常常遇到很多的瓶頸，但為了突破瓶頸，我們學會如何尋求新的數學知識來解決所遇到的困難，每當解出問題答案的那一瞬間，我們的心就雀躍不已，那片刻的興奮難以言喻，而我們真的很享受這種解題的快感！

感謝過去這一年中陪伴我成長的夥伴們，因為有你們的陪伴，讓我有勇氣嘗試各種挫敗，雖然在研究的過程中，我們常常會因意見不同而起爭執，但卻在無形之中培養了彼此之間的最佳默契，共同完成了這次的使命，此次數學探究之旅，感謝一路上不離不棄的你們。

我們這次研究的主題是「石頭消失的祕密」，是由一位印度女孩所拍的影片引發我們的研究，乍看之下石頭似乎消失不見了，其實是暗藏玄機，在生活中，只要幾顆石頭就能進行遊戲、帶來樂趣，放下手機跟我們一起同樂吧！最後非常謝謝兩位老師辛苦的帶領我們一步一步地去探索生活中的數學之美，參加科展，讓我深深感受到原來數學是可以這麼有趣。

七、 參考資料

https://www.youtube.com/watch?v=mIXFXbmOfGk 網路資料

南一（2020）。國中數學第二冊　數與代數的運算