花蓮縣第 64 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別:數學科

組　　別:國中組

作品名稱:點心中垂三角形性質之研究

關 鍵 詞: 點心中垂三角形、面積比、共點共線

編　　號:

摘要

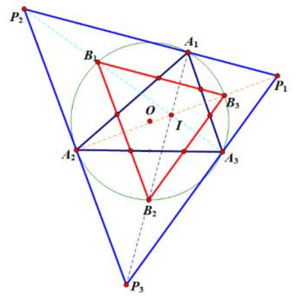
本研究由一題三角形內心與其旁心三角形頂點連線交外接圓所構成三角形面積問題出發，藉由相似形的觀察發現可透過連接頂點與內心作中垂線作圖而成，以此為靈感開始定義點心中垂三角形，創新探究其他形心所構造的點心中垂三角形性質以及與原三角形的面積比，過程中發現三角形五心之間心與心互換的關係，讓我們聯想到如果繼續疊作中垂線，三角形有外、內、垂心共點與共線性質，接著我們延伸至四邊形與多邊形，發現層層之間的圖形有彼此相似與對應邊平行…等共點、共線性質存在。

壹、前言

一、動機

某次上專題課，老師講到了三角形的五心，利用了內、外角平分線找到三角形的內心、旁心，並出了以下一道題目，因此就利用GSP畫畫看，發現與$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形相似，並得到一些有趣的結果，引發我們接下來想要對三角形其他心連接頂點作中垂，觀察所圍出的三角形間有何關係，做進一步的探討，於是便開始了我們的研究。

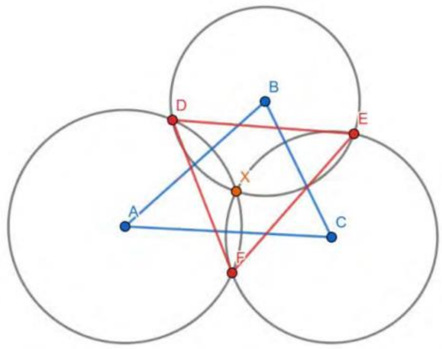
如圖，給定$\Delta A_1A_2A_3$及其外接圓O，$\Delta P_1P_2P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形，連接$\overline{P_2A_3}$、$\overline{P_3A_1}$、$\overline{P_1A_2}$分別交圓O於B_1、B_2、B_3三點，求$\Delta B_1B_2B_3$面積。



二、文獻探討

1. 在第59屆全國科展「換心手術-從三角形出發探討N邊形多心性質之研究」中，提到**頂心三角形**是指作一三角形 ABC 在其三角形內部取任一點 X，分別以三頂點A、B、C為圓心，$\overline{AX}$、$\overline{BX}$、$\overline{CX}$為半徑做圓，取三圓之交點D、E、F，連線D、E、F形成△DEF，則△DEF為△ABC之頂心三角形，與本研究不同。

2. 在2022年台灣國際科展「頂心三角形誕生的奇蹟」中，是探討了原三角形與上述頂心三角形面積比及發現了頂新線相關性質，與本作品不同。



3. 在第60屆全國科展「數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討」中，提到**頂外三角形**是指以△ABC三頂點當圓心，以頂點到外心的距離當半徑畫圓，三圓的交點(不包含ΔABC外心）連線即為頂外三角形，所定義方式與研究方向與本作品不同。

貳、研究目的

一、探討$\Delta A_1A_2A_3$與點(內、旁、重、外、垂)心中垂三角形之相關性質。

二、探討原三角形與點心中垂三角形邊長與面積比的幾何性質。

三、尋找四邊形的內心與外心與點心中垂四邊形是否有心心互換性質。

參、研究器材

紙、筆、GSP 數學繪圖軟體，利用繪圖軟體計算輔助自己的研究。

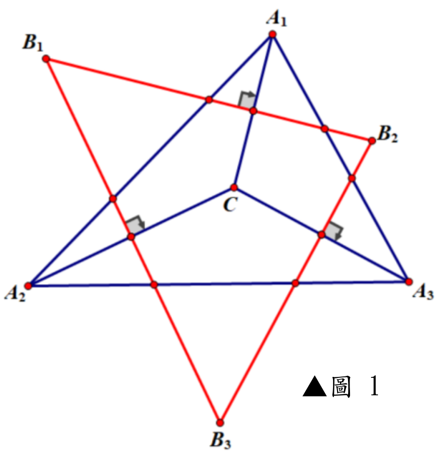
肆、研究過程

一、名詞定義與點(內)心三角形的幾何性質

(一) 名詞定義

【定義】點心中垂三角形

如圖1，平面上給定$\Delta A_1A_2A_3$及C點(內、旁、重、外、垂心)，分別連接C點與$\Delta A_1A_2A_3$的三個頂點後所得$\overline{CA_1}$、$\overline{CA_2}$、$\overline{CA_3}$線段作中垂線，若三條中垂線相交於B_1、B_2、B_3三點，連接B_1、B_2、B_3三點所得$\Delta B_1B_2B_3$稱為$\Delta A_1A_2A_3$在C點的點心中垂三角形。



▲圖 1

（二）點(內)心中垂三角形的幾何性質

性質1-1　點(內)心中垂三角形$\Delta B_1B_2B_3$與旁心三角形$\Delta P_1P_2P_3$相似。

已知：$\Delta P_1P_2P_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的內心點中垂三角形

求證：$\Delta B_1B_2B_3 \sim \Delta P_1P_2P_3$

證明：如右圖，I為$\Delta A_1A_2A_3$的內心，

也是$\Delta P_1P_2P_3$的垂心，令$\angle A_1 = 2\alpha$、$\angle A_2 = 2\beta$、

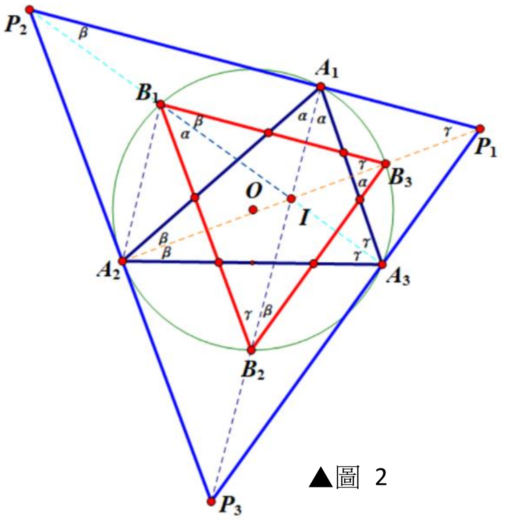
$\angle A_3 = 2\gamma$，則$\angle P_1 = \alpha + \gamma$、$\angle P_2 = \alpha + \beta$、$\angle P_3 = \beta + \gamma$，

$\because \angle B_3B_1A_3 = \angle A_3A_2B_3 = \beta$，$\angle B_2B_1A_3 = \angle A_3A_1B_2 = \alpha$

$\therefore \angle B_1 = \alpha + \beta = \angle P_2$，同理

$\angle B_2 = \beta + \gamma = \angle P_3$

$\angle B_3 = \alpha + \gamma = \angle P_1$，因此$\Delta B_1B_2B_3 \sim \Delta P_1P_2P_3$。



▲圖 2

性質1-2點(內)心中垂三角形$\Delta B_1B_2B_3$會是旁心三角形$\Delta P_1P_2P_3$以I為縮放中心縮小$\frac{1}{2}$之圖形

已知：$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的共接圓旁心三角形

求證：B_1、B_2、B_3分別為$\overline{IP_2}$、$\overline{IP_3}$、$\overline{IP_1}$的中點

證明：如右圖，

$\because \alpha + \beta + \gamma = 90°$，$\angle P_1 = \alpha + \gamma$

$\therefore \angle P_1P_2A_3 = 90° - (\alpha + \gamma) = \beta = \angle B_3B_1A_3$

$\Rightarrow \overline{B_1B_3} // \overline{P_1P_2}$，同理$\overline{B_1B_2} // \overline{P_2P_3}$，$\overline{B_2B_3} // \overline{P_1P_3}$，

又$\because \angle IA_1P_2 = \angle IA_2P_2 = 90°$

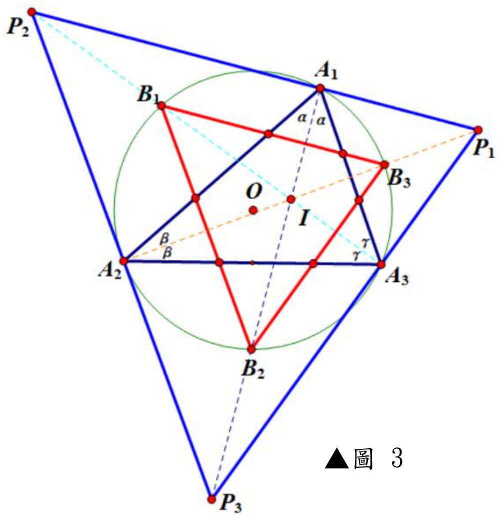
$\therefore$ I、A_1、P_2、A_2　四點共圓且$\overline{P_2I}$為直徑，連接B_1、A_2

在ΔIB_1A_2中，$\because \angle B_1IA_2 = \frac{1}{2}\left(\widehat{B_1A_2} + \widehat{B_3A_3}\right) = \beta + \gamma$

$$\angle B_1A_2I = \frac{1}{2}\widehat{B_1B_3} = \beta + \gamma = \angle B_1IA_2 \Rightarrow \overline{B_1A_2} = \overline{B_1I}$$

因此B_1必為四邊形$IA_1P_2A_2$外接圓圓心，則B_1為$\overline{IP_2}$中點，

同理可證B_2、B_3也是$\overline{IP_3}$、$\overline{IP_1}$的中點。



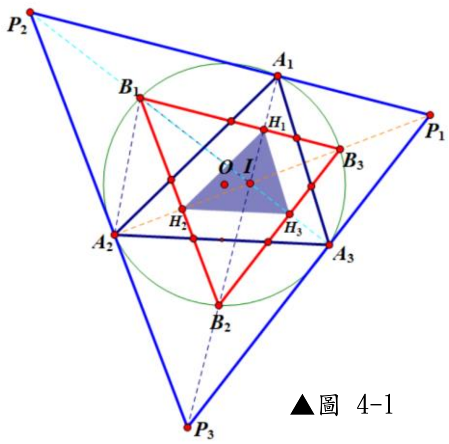
▲圖 3

有了性質1-2，便可推得以下性質1-3

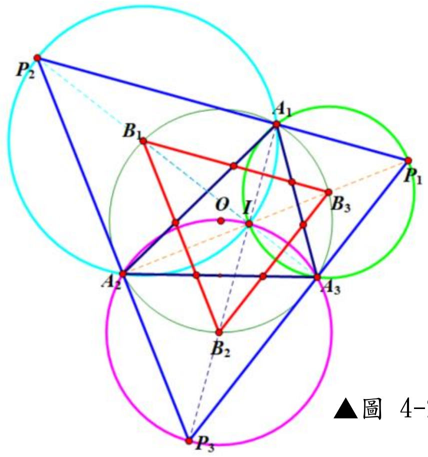
性質1-3 點(內)心中垂三角形$\Delta B_1B_2B_3$的三邊分別通過$\Delta A_1A_2A_3$頂點與內心的連線之中點，且互相垂直，即$\overline{B_1B_3}$為$\overline{A_1I}$之中垂線，$\overline{B_1B_2}$為$\overline{A_2I}$之中垂線，$\overline{B_2B_3}$為$\overline{A_3I}$之中垂線。

有了性質1-3便可推得以下性質1-4

性質1-4 $\Delta B_1B_2B_3$的垂心為原$\Delta A_1A_2A_3$的內心，且$\Delta B_1B_2B_3$的垂心三角形$\Delta H_1H_2H_3$也會是原三角形$\Delta A_1A_2A_3$以內心I為縮放中心，縮小$\frac{1}{2}$之圖形(圖4-1)。



▲圖 4-1



▲圖 4-2

討論一

1. 如圖4-2，從以上性質發現，四邊形I$A_1P_1A_3$、I$A_1P_2A_2$、I$A_2P_3A_3$分別共圓，且圓心剛好在B_1、B_2、B_3，造成旁心三角形與$\Delta B_1B_2B_3$相似，而圓B_1、圓B_2、圓B_3三圓中任兩圓又分別相交於A_1、I，A_2、I，A_3、I，造成四邊形I$B_1A_1B_3$、I$B_3A_2B_2$、I$B_2A_2B_1$皆為箏形。

2. 此時原三角形$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓圓O剛好通過B_1、B_2、B_3，造成了P_2、B_1、I、A_3，P_1、B_3、I、A_2與P_3、B_2、I、A_1四點共線。

由性質1-3也可推論四邊形$IH_1B_1H_2$、$IH_1B_3H_3$、$IH_3B_2H_2$三個四邊形共圓之外，還有三個四邊形會共圓。

性質1-5 點(內)心中垂三角形$\Delta B_1B_2B_3$和原三角形$\Delta A_1A_2A_3$兩三角形的三邊交點分別為C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6，則四邊形$B_1B_3C_5C_4$、$B_3B_2C_3C_2$、$B_2B_1C_1C_6$會有外接圓。

證明：

如圖5-1，四邊形$B_1B_3C_5C_4$ 中

$\because \angle B_1 = \angle IB_1B_3 + \angle IB_1B_2 = \ \beta + \alpha$

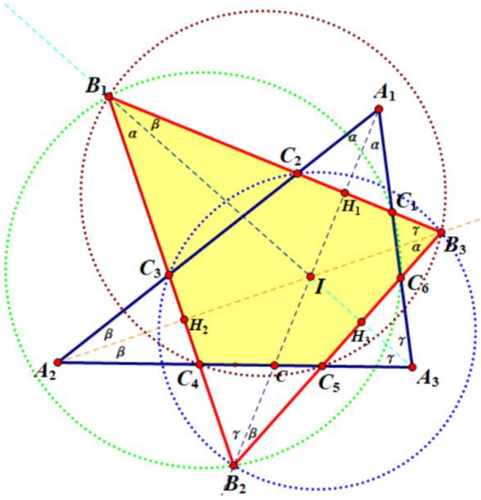
$\angle B_3C_5C_4 = 180° - \angle B_3C_5A_3 = 180° - \frac{1}{2}\left(\widehat{B_3A_3} + \widehat{B_2A_2}\right)$

$= 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (90° - \gamma) = 90° + \gamma$

$\therefore \angle B_1 + \angle B_3C_5C_4 = \beta + \alpha + 90° + \gamma = 180°$

因此B_1、B_3、C_5、C_4四點共圓，

同理可證$B_3B_2C_3C_2$、$B_2B_1C_1C_6$ 皆有外接圓。



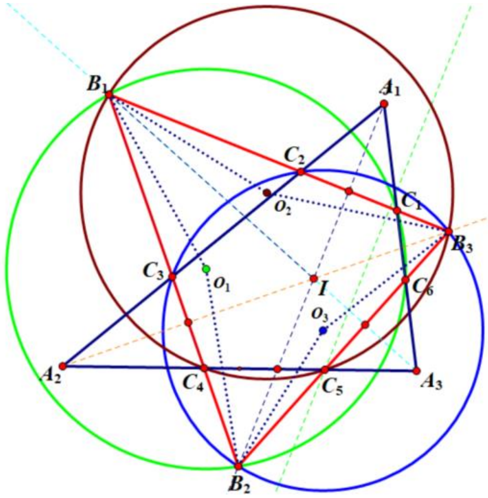
▲圖 5-1

討論二

藉由性質1-5，也讓我們發現等角共軛點。

說明：

如圖5-2，若四邊形$B_1B_3C_5C_4$外接圓為圓O_2，四邊形$B_3B_2C_3C_2$外接圓為圓O_3，四邊形$B_2B_1C_1C_6$外接圓為圓O_1，則$\angle O_1B_1B_2 = \angle O_1B_2B_1 = \angle O_2B_1B_3 = \angle O_2B_3B_1 = \angle O_3B_2B_3 = \angle O_3B_3B_2$。



▲圖 5-2

（三）點(內)心中垂三角形和原三角形的面積關係

從以上發現的性質，利用共圓的想法，便可不需透過三個旁心圓探討出旁心三角形的面積，並可利用角度與內切圓半徑，計算出$\Delta B_1B_2B_3$和$\Delta A_1A_2A_3$的面積，藉此觀察並探討$\Delta B_1B_2B_3$和$\Delta A_1A_2A_3$的面積間關係。

性質1-6 點(內)心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的面積$=\frac{1}{8}r^2 \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}$

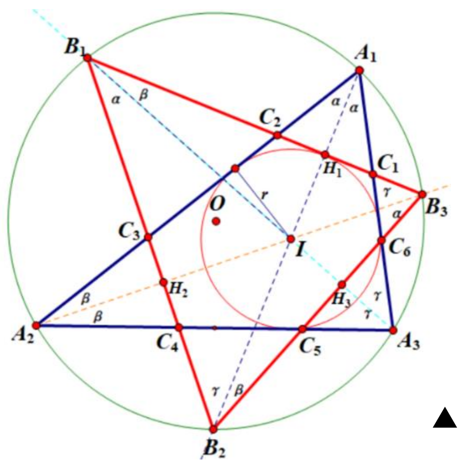
證明：

(1)如右圖，令$\Delta A_1A_2A_3$內切圓半徑為r

$\overline{A_1I} = \frac{r}{\sin\alpha}$，由性質1-3 $\Rightarrow$ $\overline{H_1I} = \frac{r}{2\sin\alpha}$

$\Rightarrow \overline{B_1H_1} = \frac{\overline{H_1I}}{\tan\beta} = \frac{r}{2}\cdot\frac{\cot\beta}{\sin\alpha}$ ， $\overline{B_3H_1} = \frac{\overline{H_1I}}{\tan\gamma} = \frac{r}{2}\cdot\frac{\cot\gamma}{\sin\alpha}$

可得$\Delta B_1B_3I = \frac{\overline{B_1B_3}\times\overline{H_1I}}{2}$



▲圖 6

$$=\frac{r}{2}\cdot\frac{(\cot\beta+\cot\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\frac{r}{2\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\beta+\cot\gamma}{sin^2\alpha}$$

同理$\Delta B_1B_2I=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\alpha+\cot\gamma}{sin^2\beta}$，$\Delta B_2B_3I=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{sin^2\gamma}$

$$\therefore\Delta B_1B_2B_3=\frac{r^2}{8}\cdot(\frac{\cot\beta+\cot\gamma}{sin^2\alpha}+\frac{\cot\alpha+\cot\gamma}{sin^2\beta}+\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{sin^2\gamma})$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{(\cot\beta+\cot\gamma)sin^2\beta\cdot sin^2\gamma+(\cot\alpha+\cot\gamma)sin^2\alpha\cdot sin^2\gamma+(\cot\beta+\cot\alpha)sin^2\beta\cdot sin^2\alpha}{sin^2\alpha\cdot sin^2\beta\cdot sin^2\gamma}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\left(\frac{\sin(\beta+r)}{\sin\beta\sin\gamma}\right)sin^2\beta\cdot sin^2\gamma+\left(\frac{\sin(\alpha+r)}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)sin^2\alpha\cdot sin^2\gamma+\left(\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta\sin\alpha}\right)sin^2\beta\cdot sin^2\alpha}{sin^2\alpha\cdot sin^2\beta\cdot sin^2\gamma}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma+\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha}{sin^2\alpha\cdot sin^2\beta\cdot sin^2\gamma}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\cot\alpha+\cot\beta+\cot r}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma+\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)+\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\cos\gamma(\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\cos\gamma[\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta]}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}]=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

(2)接著利用角度推導$\Delta A_1A_2A_3$的面積，求得面積比：

如圖六，$\overline{A_1A_2}=\mathrm{r}(\cot\alpha+\cot\beta)$，$\overline{A_1A_3}=\mathrm{r}(\cot\alpha+\cot\gamma)$，$\overline{A_2A_3}=\mathrm{r}(\cot\beta+\cot\gamma)$

$$\therefore\Delta A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{r}\cdot(\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{r}^2\cdot(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)\cdot 2$$

$$=\mathrm{r}^2\cdot(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma})$$

$$=\mathrm{r}^2\cdot(\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma})$$

最後根據性質1-6與$\Delta A_1A_2A_3$面積公式可得性質1-7：

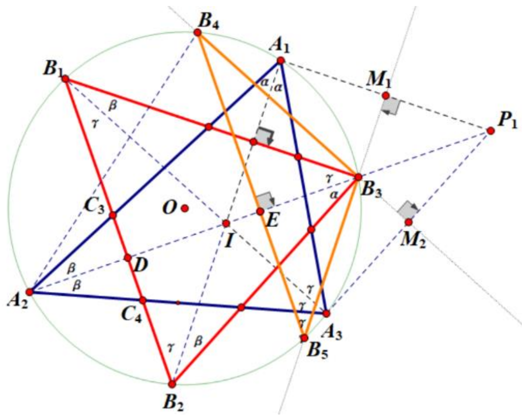
性質1-7 原三角形$\Delta A_1A_2A_3$與點(內)心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的面積比值$= 8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。

以性質1-3為靈感，內心I與三角形頂點連線的中點作中垂線所圍成的圖形為點(內)心中垂三角形，那如果用三角形的三個旁心P_1、P_2、P_3連接三頂點一樣作中垂線，所圍出的三角形會不會也在$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓圓O上呢？接下來是我們的研究

(四)點(旁)心中垂三角形的相關性質

性質1-8 如圖7，以旁心P_1連接A_1、A_3兩點，分別作$\overline{P_1A_1}$、$\overline{P_1A_2}$的中垂線，分別交圓O於B_5、B_3及B_4、B_3，連接B_4、B_5兩點，則$\overline{B_4B_5} // \overline{B_1B_2}$ 且$\overline{B_4B_5} = \overline{B_1B_2}$。

證明：



▲圖 7

(1)首先先說明兩中垂線$\overline{M_1B_5}$、$\overline{M_2B_4}$為何會交於B_3

在ΔIA_1P_1中，$\because \angle IA_1P_1 = 90°$

$\therefore \Delta IA_1P_1$為直角三角形，由性質1-3

$\overline{IA_1}$與$\overline{A_1P_1}$兩邊的中垂線必交於斜邊中點B_3

同理$\because \Delta IA_3P_1$為直角三角形

$\overline{IA_3}$與$\overline{A_3P_1}$兩邊的中垂線必交於斜邊中點B_3

(2) $\because \angle A_1P_1C_3 = \gamma$

$\Rightarrow \angle M_1B_3P_1 = 90° - (\beta + \alpha) = \angle A_2B_3B_5$，又$\angle A_2B_3B_2 = \alpha$

$\Rightarrow \angle B_2B_3C_2 = (\beta + \alpha) - \alpha = \beta$ 同理可證$\angle B_4B_3B_1 = (\beta + \gamma) - \gamma = \beta$

$\therefore$由等弧對等弦可知，$\overline{B_4B_5} // \overline{B_1B_2}$ 且$\overline{B_4B_5} = \overline{B_1B_2}$。

接著我們證明$\overline{B_4B_5} \perp \overline{A_2P_1}$

性質1-9 如圖7，以旁心P_1連接A_1、A_2兩點，分別作$\overline{P_1A_1}$、$\overline{P_1A_2}$的中垂線，分別交圓O於B_5、B_3及B_4、B_3，連接B_4、B_5兩點，則$\overline{B_4B_5} \perp \overline{A_2P_1}$且四邊形$B_1B_2B_4B_5$必為矩形。

證明：

(1)由性質1-8可知$\overline{B_4B_5} // \overline{B_1B_2}$，因此只要證明$\overline{B_1B_2} \perp \overline{A_2P_1}$，便可證矩形

在$\Delta A_2C_3C_4$中

$$\because \angle B_1DA_2 = \frac{1}{2}\left(\widehat{B_1A_2} + \widehat{B_2B_3}\right) = \frac{1}{2}(2\gamma + 2\alpha + 2\beta) = 90°$$

$\Rightarrow \overline{B_1B_2} \perp \overline{A_2P_1} \Rightarrow \overline{C_1C_2} \perp \overline{A_2P_1}$

（2）$\because \angle B_5B_4B_1 = \frac{1}{2}\left(\widehat{B_1B_2} + \widehat{B_2B_5}\right)$

$$= \frac{1}{2}(2\gamma + 2\alpha + 2\beta) = 90°，$$

再由性質1-8，一組對邊平行且相等為平行四邊形，

若其中一角為直角則為矩形，即四邊形$B_1B_2B_4B_5$必為矩形。

最後證明$\overline{C_1C_2}$會平分$\overline{A_2P_1}$。

性質1-10 如圖8，以旁心P_1連接A_1、A_2兩點，分別作$\overline{P_1A_1}$、$\overline{P_1A_2}$的中垂線，分別交圓O於B_5、B_3及B_4、B_3，連接B_4、B_5兩點，若$\overline{B_4B_5}$交$\overline{A_2P_1}$於E點，則$\overline{EA_2} = \overline{EP_1}$。

證明：

如右圖，令$\overline{A_1I} = 2t$，

則$\overline{IB_3} = t\csc\gamma = \overline{B_3P_1}$（由性質2-1）

$\because \overline{B_4E} = \overline{B_1D} = (t\csc\beta)\cos\alpha$

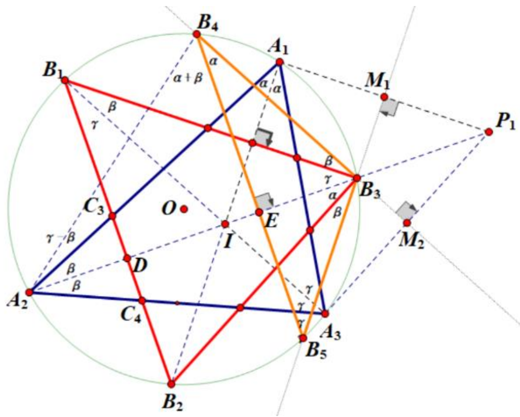
$\therefore \overline{EB_3} = \overline{B_4E}\tan\alpha = (t\csc\beta)\cos\alpha\tan\alpha$

可得$\overline{EP_1} = \overline{EB_3} + \overline{B_3P_1} = t[\csc\gamma + \csc\beta\sin\alpha]$

$$= t[\frac{1}{\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}] = t\frac{\sin\beta + \sin\gamma\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}$$

$$= t\frac{\cos(\alpha+\gamma) + \sin\gamma\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta} = t\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\beta}$$

$$= t\cot\gamma\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$



▲圖 8

又$\overline{EA_2} = \overline{B_4E}\tan(\alpha+\beta)$

$$= (t\csc\beta)\cos\alpha\tan(\alpha+\beta) = t\frac{\cos\alpha\tan(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = t\frac{\cos\alpha\cot\gamma}{\sin\beta}$$

因此$\overline{EP_1} = \overline{EA_2}$，即$\overline{B_4B_5}$也會通過$\overline{A_2P_1}$的中點。

根據性質1-9與性質1-10可得$\overline{B_4B_5}$也是$\overline{A_2P_1}$的中垂線，於是有了以下性質：

性質1-11 以旁心P_1連接$\Delta A_1A_2A_3$的三頂點後分別作中垂線，則三條中垂線所圍出的$\Delta B_3B_4B_5$必在$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓上。

有了性質1-11，接著算出點(旁)心三角形$\Delta B_3B_4B_5$的面積，藉此觀察並探討和原三角形$\Delta A_1A_2A_3$的面積間關係。

性質1-12 若$\Delta B_3B_4B_5$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(旁)心三角形，則$\Delta B_3B_4B_5$面積 $=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$。

證明：

如圖8，由性質1-6

令$\overline{A_1I}=\dfrac{r}{\sin\alpha}=2t\quad\Rightarrow t=\dfrac{r}{2\sin\alpha}$

$\because\overline{IB_3}=t\csc\gamma$，$\overline{B_4E}=(t\csc\beta)\cos\alpha\Rightarrow\overline{EB_3}=(t\csc\beta)\cos\alpha\tan\alpha$

又$\overline{B_4B_5}=\overline{B_4E}+\overline{B_5E}=\overline{B_4E}+\overline{B_3E}\cot\gamma=(t\csc\beta)\cos\alpha+(t\csc\beta)\sin\alpha\cot\gamma$

$=(t\csc\beta)(\cos\alpha+\sin\alpha\cot\gamma)$　將$t=\frac{r}{2\sin\alpha}$ 代入

$=r\dfrac{\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$

$\therefore\Delta B_3B_4B_5$面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{B_4B_5}\times\overline{EB_3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{r\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\times\dfrac{r\cos\alpha\tan\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta}$

$=\dfrac{r^2}{8}\cdot\dfrac{\cot\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$

可得與$\Delta A_1A_2A_3$面積比值為$8\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$。

如下圖9從旁心P_2、P_3所得點(旁)心中垂三角形$\Delta B_2B_5B_6$、$\Delta B_1B_4B_6$也會在$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓上，同理$\Delta B_2B_5B_6$*面積*$=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$，$\Delta B_1B_4B_6$*面積*$=\frac{r^2}{8}\cdot\frac{\cot\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$，可得性質1-13

性質1-13

(1)原三角形$\Delta A_1A_2A_3$與點(旁)心三角形$\Delta B_3B_4B_5$的面積比值$=8\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$。

(2)原三角形$\Delta A_1A_2A_3$與點(旁)心三角形$\Delta B_2B_5B_6$的面積比值$=8\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$。

(3)原三角形$\Delta A_1A_2A_3$與點(旁)心三角形$\Delta B_1B_4B_6$的面積比值$=8\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$。

有了以上**面積比**的研究，讓我們進一步發現以下三角形面積恆等式：

定理 $\Delta A_1A_2A_3$三個旁心所構成點(旁)心三角形$\Delta B_3B_4B_5$、$\Delta B_2B_5B_6$、$\Delta B_1B_4B_6$的面積和會與其點(內)心三角形$\Delta B_1B_2B_3$面積相等，即$\Delta B_3B_4B_5+\Delta B_2B_5B_6+\Delta B_1B_4B_6=\Delta B_1B_2B_3$。

證明：根據性質1-13

$\Delta B_3B_4B_5+\Delta B_2B_5B_6+\Delta B_1B_4B_6$

$=\dfrac{\Delta A_1A_2A_3}{8}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}+\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}\right)$

$=\frac{\Delta A_1A_2A_3}{8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}(cot\alpha+cot\beta+cot\gamma)$

$=\frac{\Delta A_1A_2A_3}{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(tan\alpha tan\beta+tan\beta tan\gamma+tan\gamma tan\alpha)$ （$\because \alpha+\beta+\gamma=90°$）

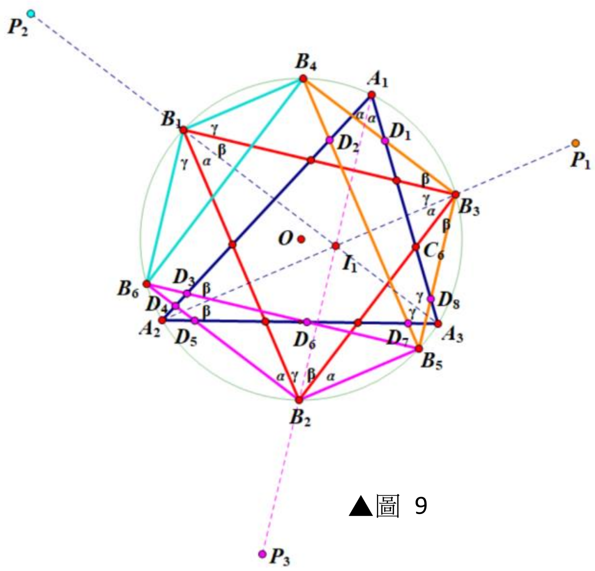
$=\frac{\Delta A_1A_2A_3}{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\Delta B_1B_2B_3$ （根據性質1-7）

此外，和點(內)心三角形相同，仍會有共圓的有趣性質存在：

> 性質1-14　如圖9，以P_1、P_2、P_3連接三頂點作中垂線，所圍出的三角形$\Delta B_3B_4B_5$、$\Delta B_1B_4B_6$與原三角形$\Delta A_1A_2A_3$交點所構成四邊形$D_2D_3B_4B_6$和$D_1D_8B_4B_5$皆四點共圓。

證明：

(1)在四邊形$D_2D_3B_4B_6$中



▲圖 9

$\because \angle B_6B_4D_2=\frac{1}{2}(\widehat{B_6A_2}+\widehat{A_2B_2}+\widehat{B_2B_5})$

$=\frac{1}{2}(\widehat{B_6B_2}-\widehat{A_2B_2}+\widehat{A_2B_2}+\widehat{B_2B_5})$

$=\frac{1}{2}(2\gamma-2\alpha+2\alpha+2\beta)=\gamma+\beta$

$\because \angle B_6D_3D_2=\frac{1}{2}(\widehat{B_6A_1}+\widehat{A_2B_5})$

$=\frac{1}{2}[(\widehat{B_6B_1}+\widehat{B_1B_4}+\widehat{B_4A_1})+(\widehat{A_2B_2}+\widehat{B_2B_5})]$

$=\frac{1}{2}[(2\alpha+2\beta+2\gamma-2\beta)+(2\alpha+2\beta)]$

$=2\alpha+\gamma+\beta$

$\therefore \angle B_6B_4D_2+\angle B_6D_3D_2=(\gamma+\beta)+(2\alpha+\gamma+\beta)=180°$即四邊形$D_2D_3B_4B_6$有外接圓。

(2)在四邊形$D_1D_8B_4B_5$中，

$\because \angle D_1B_4B_5=\frac{1}{2}(\widehat{B_3A_3}+\widehat{A_3B_5})=\frac{1}{2}(2\beta+2\alpha-2\beta)=\alpha$

又$\because \angle D_1D_8B_5=\frac{1}{2}(\widehat{A_3B_3}+\widehat{B_5A_1})$

$=\frac{1}{2}(\widehat{A_3B_3}+\widehat{B_5B_6}+\widehat{B_6B_4}+\widehat{B_4A_1})$

$=\frac{1}{2}[2\beta+(2\beta+2\alpha+2\gamma-2\alpha)+(2\alpha+2\beta)+2\gamma-2\beta]=2\beta+2\gamma+\alpha$

因此$\angle D_1B_4B_5+\angle D_1D_8B_5=\alpha+(2\beta+2\gamma+\alpha)=180°$即$D_1D_8B_4B_5$有外接圓。

小結：

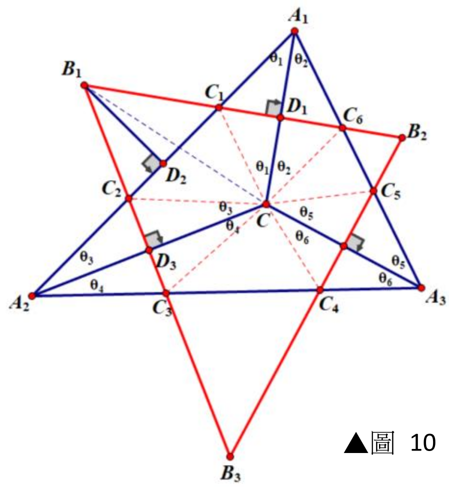
觀察$\overline{B_4B_5}$、$\overline{B_5B_6}$和$\overline{B_6B_4}$所圍成的$\Delta B_4B_5B_6$，如圖9，根據性質1-8與1-9，可得$\Delta B_4B_5B_6 \cong \Delta B_1B_2B_3$，因為兩三角形共圓且對應邊互相平行，所以$\Delta B_1B_2B_3$、$\Delta B_4B_5B_6$可視為彼此以外接圓圓心O點為對稱中心的點對稱圖形。

接下來我們好奇，如果我們將內心與旁心換成重心、外心與垂心，所構成的點(重、外、內)心中垂三角形又會有什麼樣的性質呢？

二、點(重、外、垂)心中垂三角形之探討

引理1-1 若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，C點為三角形內**任一點**，C點到$\Delta A_1A_2A_3$三頂點連線所構成線段$\overline{CA_1}=a$，$\overline{CA_2}=b$，$\overline{CA_3}=c$，$\angle CA_1A_2=\theta_1$，$\angle CA_1A_3=\theta_2$，$\angle CA_2A_1=\theta_3$，$\angle CA_2A_3=\theta_4$，$\angle CA_3A_1=\theta_5$，$\angle CA_3A_2=\theta_6$，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點心中垂三角形，則$\angle B_1=\theta_1+\theta_3$，$\angle B_2=\theta_2+\theta_5$，$\angle B_3=\theta_4+\theta_6$且$b=\frac{a\sin\theta_1}{\sin\theta_3}$，$c=\frac{a\sin\theta_2}{\sin\theta_5}$。

證明：



▲圖 10

如圖10，過B_1作$\overline{B_1D_2}\perp\overline{C_1C_2}$，

在$\Delta C_1B_1C_2$和$\Delta C_1A_1D_1$中，

$\because \angle B_1C_1D_2=\angle A_1C_1D_1$且$\angle B_1D_2C_1=\angle A_1D_1C_1=90°$

$\therefore \angle C_1B_1D_2=\angle C_1A_1D_1=\theta_1$，同理可得

$\angle D_2B_1C_2=\angle D_3A_2C_2=\theta_3 \Rightarrow \angle B_1=\theta_1+\theta_3$，同理

$\angle B_2=\theta_2+\theta_5$，$\angle B_3=\theta_4+\theta_6$。

在ΔCA_1A_2中由正弦定理可知$\frac{b}{\sin\theta_1}=\frac{a}{\sin\theta_3} \Rightarrow b=\frac{a\sin\theta_1}{\sin\theta_3}$

在ΔCA_1A_3中同理可得$\frac{C}{\sin\theta_2}=\frac{a}{\sin\theta_5} \Rightarrow c=\frac{a\sin\theta_2}{\sin\theta_5}$

引理1-2 若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，C點為三角形內**任一點**，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點心中垂三角形，則$\overline{B_1C_1}=\frac{a\cos(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_3\cos\theta_1}$。

證明：

如圖11，

$\because B_1D_1CP$四點共圓$\therefore \angle D_1CP=\pi-(\theta_1+\theta_3)$

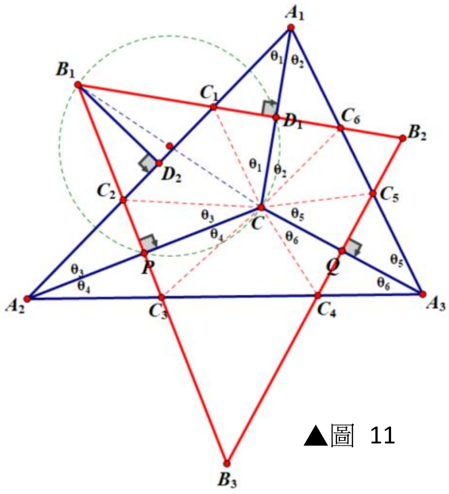
又$\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\sin[\pi-(\theta_1+\theta_3)]}=\dfrac{a}{\sin\theta_3}$

$\Rightarrow \overline{A_1A_2}=\dfrac{a\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_3}$

$\therefore \overline{C_1C_2}=\overline{A_1A_2}-\overline{C_1A_1}-\overline{C_2A_2}$

$=\dfrac{a\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_3}-\dfrac{a\sec\theta_1}{2}-\dfrac{a\sin\theta_1\sec\theta_3}{2\sin\theta_3}$

$=\dfrac{a}{2}[\dfrac{2\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1}{\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3}]$



▲圖 11

作$\overline{B_1D_2}\perp\overline{C_1C_2}$，令$\overline{B_1D_2}=h$

$\because h(\tan\theta_1+\tan\theta_3)=\overline{C_1C_2}$

$\therefore h=\dfrac{a}{2}[\dfrac{2\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1}{\sin\theta_3\sin(\theta_1+\theta_3)}]$

由h可得$\overline{B_1C_1}=\frac{a}{2}[\frac{2\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1}{\sin\theta_3\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1}]$⋯⋯(1)

接著試著將分子作化簡：

$2\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1$

$=2[\sin\theta_1\cos\theta_3+\cos\theta_1\sin\theta_3]\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1$

$=[\sin\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3]+[\cos\theta_1\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3]$

$\quad+[\cos\theta_1\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3-\sin\theta_3\cos\theta_3]$

$\quad+[\sin\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_1]$

$=\cos\theta_1\sin\theta_1\cos^2\theta_3+\cos\theta_1\sin\theta_1[cos^2\theta_3-1]$

$\quad+\sin\theta_3\cos\theta_3cos^2\theta_1+\sin\theta_3\cos\theta_3[cos^2\theta_1-1]$

$=\sin\theta_1\cos\theta_1[cos^2\theta_3-sin^2\theta_3]+\sin\theta_3\cos\theta_3[cos^2\theta_1-sin^2\theta_1]$

$=\dfrac{\sin(2\theta_1)\cos(2\theta_3)+\cos(2\theta_1)\sin(2\theta_3)}{2}=\dfrac{\sin(2\theta_1+2\theta_3)}{2}$

將其代入(1)式得

$\overline{B_1C_1}=\dfrac{a\sin(2\theta_1+2\theta_3)}{4\sin\theta_3\sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_1}=\dfrac{a\cos(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_3\cos\theta_1}$

有了引理1-2，便能開始求$\Delta B_1B_2B_3$的邊長

引理1-3　如圖11，若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，C點為三角形內任一點，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點心中垂三角形，則$\overline{B_1B_2}=\frac{a}{2}(\cot\theta_3+\cot\theta_5)$。

證明：

$\because \overline{B_1B_2}=\overline{B_1C_1}+\overline{C_1C_6}+\overline{B_2C_6}$

$$=\frac{a}{2}[\frac{\cos(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_3\cos\theta_1}+\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}+\frac{\cos(\theta_2+\theta_5)}{\sin\theta_5\cos\theta_2}]$$

$$=\frac{a}{2}[\frac{\cos\theta_1\cos\theta_3-sin\theta_1\sin\theta_3}{\sin\theta_3\cos\theta_1}+\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2+cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}+\frac{\cos\theta_2\cos\theta_5-sin\theta_2\sin\theta_5}{\sin\theta_5\cos\theta_2}]$$

$$=\frac{a}{2}[\cot\theta_5-\tan\theta_2+\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cot\theta_3-\tan\theta_1]$$

$$=\frac{a}{2}[\cot\theta_3+\cot\theta_5]$$

得到引理1-3後，讓我們驚覺原來四邊形$B_1C_1CA_2$會共圓，底下是我們驗證

引理1-4　如圖12，若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，C點為三角形內任一點，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點心中垂三角形，其中$\overline{B_1B_2}$交$\overline{A_1A_2}$於C_1，則$B_1C_1CA_2$四點共圓。

證明：

$\because B_1$為$\overline{B_1B_2}$及$\overline{B_1B_3}$兩中垂線的交點，

故B_1為ΔCA_1A_2外心

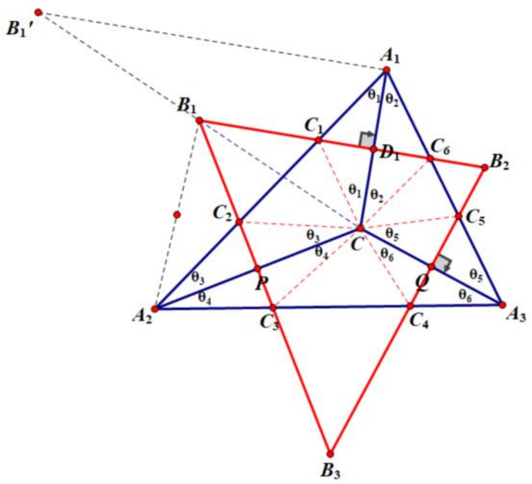
在$\overrightarrow{CB_1}$上取一點B_1'，使得$\overrightarrow{CB_1'}=2\overrightarrow{CB_1}$

$\Rightarrow A_1B_1'A_2C$四點共圓，且$\overline{CB_1'}$為直徑

$\Rightarrow \angle B_1'A_1C=90°$

$\Rightarrow \angle C_1B_1C=90°-\angle A_1CB_1'=\angle A_1B_1'C=\angle A_1A_2C$

$\therefore B_1C_1CA_2$四點共圓，同理可證



▲圖 12

$B_1C_2CA_1$、$B_2C_6CA_3$、$B_2C_5CA_1$、$B_3C_3CA_3$、$B_3C_4CA_2$皆四點共圓。

根據引理1-4，便可進一步確定$\Delta B_1B_2B_3$的內角關係：

引理1-5　如圖12，若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，C點為三角形內**任一點**，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點心中垂三角形，則$\angle CB_1B_3=\angle A_2B_1B_3=\theta_1$，$\angle CB_1B_2=\angle A_1B_1B_3=\theta_3$，$\angle CB_2B_1=\angle A_1B_2B_1=\theta_5$，$\angle CB_2B_3=\angle A_3B_2B_3=\theta_2$，$\angle CB_3B_2=\angle A_3B_3B_2=\theta_4$，$\angle CB_3B_1=\angle A_2B_3B_1=\theta_6$。

說明：

根據引理1-4，$B_1C_2CA_1$四點共圓

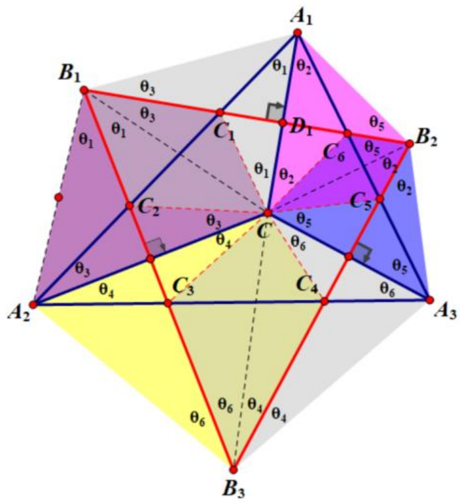
則$\angle CB_1B_3 = \angle CA_1A_2 = \theta_1$

又∵$\overline{B_1B_2}$及$\overline{B_1B_3}$、$\overline{B_2B_3}$為中垂線，

∴四邊形$CB_2A_1B_1$、$CB_1A_2B_3$、$CB_2A_3B_3$皆為箏形

$\Rightarrow \angle A_2B_1B_3 = \angle CB_1B_3 = \angle CA_1A_2 = \theta_1$

其餘角度關係同理可證



▲圖 13

（一）點（重）心中垂三角形的相關性質

> 性質2-1　若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，G為$\Delta A_1A_2A_3$重心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點（重）心中垂三角形，$\overline{GA_1} = a$，$\overline{GA_2} = b$，$\overline{GA_3} = c$，則$\Delta B_1B_2B_3$的重心與$\Delta A_1A_2A_3$的外心共點。

已知：若E為$\overline{A_1A_2}$中點，連接$\overrightarrow{B_1E}$交$\overline{B_2B_3}$於F點。

求證：$\overline{B_1F}$必為$\Delta A_1A_2A_3$之中垂線，且為$\Delta B_1B_2B_3$之中線。

證明：

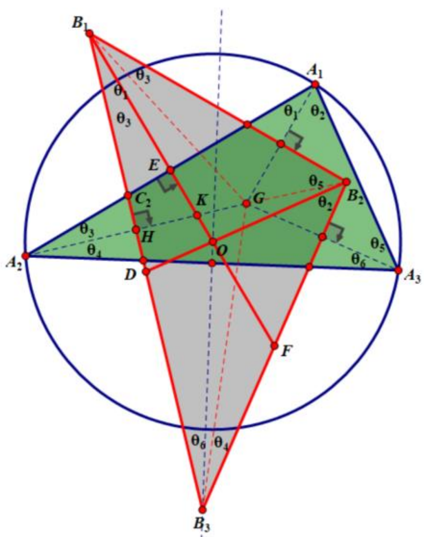
令O為$\Delta A_1A_2A_3$的外心，連接$\overrightarrow{B_1O}$交$\overline{B_2B_3}$於F點

∵ B_1為$\overline{B_1B_2}$及$\overline{B_1B_3}$兩中垂線的交點，

故B_1為ΔGA_1A_2外心，E為$\overline{A_1A_2}$中點

∴ $\overline{B_1E} \perp \overline{A_1A_2}$，即$\overline{B_1F}$必為$\Delta A_1A_2A_3$之中垂線

∵ $\overline{B_1E} \perp \overline{A_1A_2}$　$\Rightarrow \Delta B_1EC_2 \sim \Delta B_1HK \sim \Delta A_2EK$



▲圖 14

$\Rightarrow \angle FB_1B_3 = \angle EA_2K = \theta_3$由引理1-1 $\angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$

∴ $\angle FB_1B_2 = (\theta_1 + \theta_3) - \theta_3 = \theta_1$，因此，若要證明$\overline{B_1F}$為中線

僅須證明$\overline{B_1B_2}$：$\overline{B_1B_3} = \sin\theta_3$ ： $\sin\theta_1$

由正弦定理，$\overline{B_1B_2}$=2R$\sin(\theta_4 + \theta_6)$，$\overline{B_1B_3}$=2R$\sin(\theta_2 + \theta_5)$，R為$\Delta B_1B_2B_3$外接圓半徑

又∵ G為重心， $\Delta GA_1A_2 = \Delta GA_2A_3 = \Delta GA_1A_3$

故$ab\sin(\theta_1 + \theta_3) = bc\sin(\theta_4 + \theta_6) = ca\sin(\theta_2 + \theta_5)$

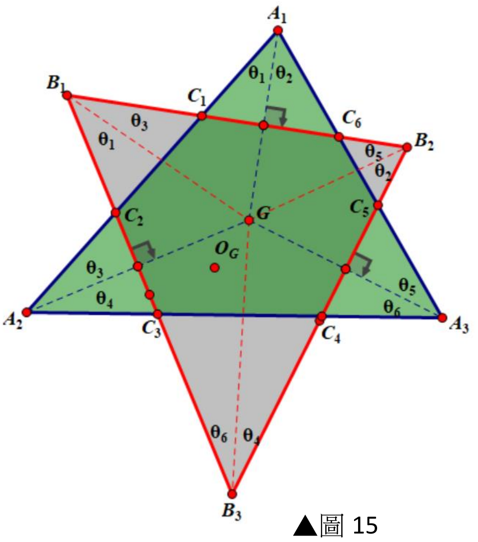
$\Rightarrow \overline{B_1B_2}$：$\overline{B_1B_3} = \sin(\theta_4 + \theta_6)$：$\sin(\theta_2 + \theta_5) = ca$：$bc = a$：b

由正弦定理，$\frac{a}{\sin\theta_3} = \frac{b}{\sin\theta_1} \Rightarrow \overline{B_1B_2}$：$\overline{B_1B_3} = \sin\theta_3$ ： $\sin\theta_1$

故$\overline{B_1F}$為$\Delta B_1B_2B_3$之中線，同理$\overline{B_2D}$為$\Delta B_1B_2B_3$之中線，故可得$\Delta B_1B_2B_3$的重心與$\Delta A_1A_2A_3$的外心共點

> 性質2-2　若$\Delta A_1A_2A_3$為任意三角形，G為三角形重心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(重)心中垂三角形，$\overline{GA_1}=a$，$\overline{GA_2}=b$，$\overline{GA_3}=c$，則$\Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}R$，其中R為$\Delta B_1B_2B_3$外接圓半徑。

證明：



▲圖 15

如圖，∵ G為重心，

則$\Delta GA_1A_2=\Delta GA_2A_3=\Delta GA_1A_3$

故$ab\sin(\theta_1+\theta_3)=bc\sin(\theta_4+\theta_6)=ca\sin(\theta_2+\theta_5)$

$\because \Delta A_1A_2A_3=\dfrac{ab}{2}\sin(\theta_1+\theta_3)\cdot 3=\dfrac{3}{2}ab\sin(\theta_1+\theta_3)$

且$\overline{B_1B_2}=2R\sin(\theta_4+\theta_6)$，$\overline{B_1B_3}=2R\sin(\theta_2+\theta_5)$

，$\overline{B_2B_3}=2R\sin(\theta_1+\theta_3)$

$\Rightarrow \Delta B_1B_2B_3=\Delta B_1B_2G+\Delta GB_2B_3+\Delta GB_1B_3$

$=\dfrac{a}{4}\cdot\overline{B_1B_2}+\dfrac{b}{4}\cdot\overline{B_1B_3}+\dfrac{c}{4}\cdot\overline{B_2B_3}$

$=\dfrac{a}{4}\cdot(2R\sin(\theta_4+\theta_6))+\dfrac{b}{4}\cdot(2R\sin(\theta_2+\theta_5))+\dfrac{c}{4}\cdot(2R\sin(\theta_1+\theta_3))$

$=\dfrac{aR}{2}\times\dfrac{a}{c}\sin(\theta_1+\theta_3)+\dfrac{bR}{2}\times\dfrac{b}{c}\sin(\theta_1+\theta_3)+\dfrac{cR}{2}\sin(\theta_1+\theta_3)$

$=\dfrac{R}{2}\sin(\theta_1+\theta_3)[\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+c]\quad=\dfrac{R\sin(\theta_1+\theta_3)(a^2+b^2+c^2)}{2c}$

$\therefore \Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}R$，由引理1-3，其中$\Delta B_1B_2B_3$外接圓半徑

$R=\dfrac{a(\cot\theta_3+\cot\theta_5)}{4\sin(\theta_4+\theta_6)}=\dfrac{b(\cot\theta_1+\cot\theta_6)}{4\sin(\theta_2+\theta_5)}=\dfrac{c(\cot\theta_2+\cot\theta_4)}{4\sin(\theta_1+\theta_3)}$

(二)點(外)心中垂三角形的相關性質

> 性質2-3　若$\Delta A_1A_2A_3$為銳角三角形，O點為$\Delta A_1A_2A_3$外心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(外)心中垂三角形，$\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\overline{OA_3}$為$\Delta A_1A_2A_3$外接圓半徑，則$\Delta B_1B_2B_3$的內心與$\Delta A_1A_2A_3$的外心共點。

證明：

$\because$O點為$\Delta A_1A_2A_3$外心，

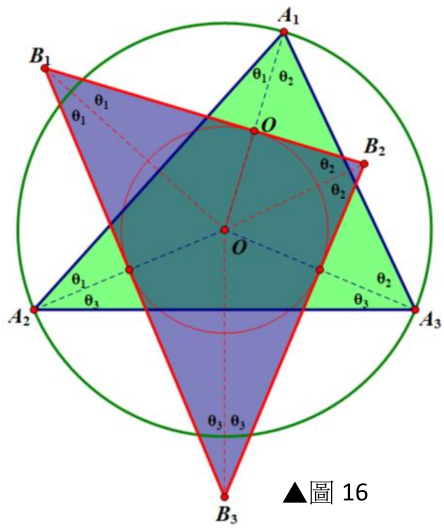
令$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\theta_1$，$\angle OA_1A_3=\angle OA_3A_1=\theta_2$

$\angle OA_2A_3=\angle OA_3A_2=\theta_3$，根據引理1-5可得

$\angle OB_1B_2=\angle OA_2A_1=\theta_1$，$\angle OB_1B_3=\angle OA_1A_2=\theta_1$

$\therefore\overline{OB_1}$為角平分線，同理可得$\overline{OB_2}$平分$\angle B_2$，

$\overline{OB_3}$平分$\angle B_3$，故O點為$\Delta B_1B_2B_3$的內心

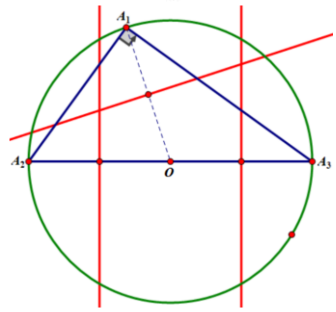


▲圖 16

當$\Delta A_1A_2A_3$為直角三角形時，連接外心作三條中垂線，

此時因為其中兩條為平行線，原本三個交點會退化成兩點，

因此無法圍成$\Delta B_1B_2B_3$，如右圖。



性質2-4　若$\Delta A_1A_2A_3$為鈍角三角形，$\angle A_1>90°$，O點為$\Delta A_1A_2A_3$外心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(外)心中垂三角形， $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\overline{OA_3}$為$\Delta A_1A_2A_3$外接圓半徑，$\angle A_1=\theta_1+\theta_2$，$\angle A_2=\theta_3$，$\angle A_3=\theta_4$，則$\Delta B_1B_2B_3$的旁心與$\Delta A_1A_2A_3$的外心共點且$\angle B_1=180°-2\theta_1$，$\angle B_2=180°-2\theta_2$，$\angle B_3=2(\theta_1+\theta_2)-180°$。

證明：

(1)如圖17，$\because\overline{OA_1}=\overline{OA_2}$，$\overrightarrow{CB_3}$、$\overrightarrow{EB_1}$分別為其中垂線，

$\Rightarrow\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_2}=\overline{OE}$，且$\angle B_1CO=\angle B_1EO=90°$

$\Rightarrow\Delta B_1CO\cong\Delta B_1EO$（RHS）$\Rightarrow\overline{B_1O}$為$\Delta B_1B_2B_3$中$\angle B_1$之外角平分線

同理$\overline{B_2O}$為$\Delta B_1B_2B_3$中$\angle B_2$之外角平分線，故O點為$\Delta B_1B_2B_3$之旁心

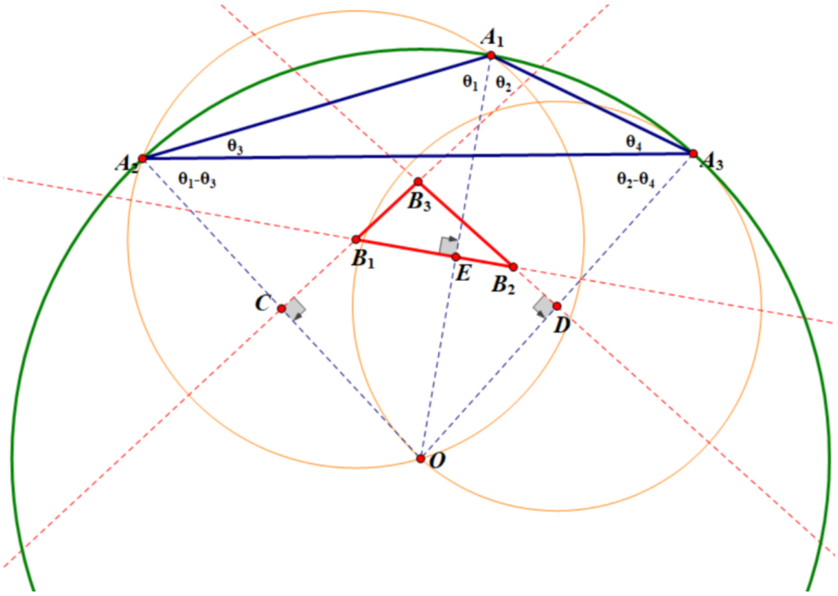
(2) $\because B_3COD$四點共圓，$\angle B_3=180°-(360°-2\angle A)=2\angle A-180°=2(\theta_1+\theta_2)-180°$

又$\because B_1COE$四點共圓$\Rightarrow\angle CB_1E=180°-\angle A_1OA_2=180°-(180°-2\theta_1)=2\theta_1$

$\Rightarrow\angle B_1=180°-\angle CB_1E=180°-2\theta_1$

同理B_2DOE四點共圓$\Rightarrow\angle DB_2E=180°-\angle A_1OA_3=180°-(180°-2\theta_2)=2\theta_2$

$\Rightarrow\angle B_2=180°-\angle DB_2E=180°-2\theta_2$



▲圖 17

接下來我們探討面積比問題

性質2-5　若$\Delta A_1A_2A_3$為銳角三角形，O點為$\Delta A_1A_2A_3$外心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(外)心中垂三角形，則$\Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值$=\frac{1}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$。

證明：

由性質2-3，若$\Delta A_1A_2A_3$外接圓半徑R，$\Delta B_1B_2B_3$內切圓半徑為r，則$\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\overline{OA_3}=2\mathrm{r}=\mathrm{R}$

$$\Delta A_1A_2A_3=\frac{R^2}{2}\sin(\pi-2\theta_1)+\frac{R^2}{2}\sin(\pi-2\theta_2)+\frac{R^2}{2}\sin(\pi-2\theta_3)$$

$$=\frac{4r^2}{2}[sin2\theta_1+sin2\theta_2+sin2\theta_3]$$

$$=2r^2[4cos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3]=8r^2cos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3$$

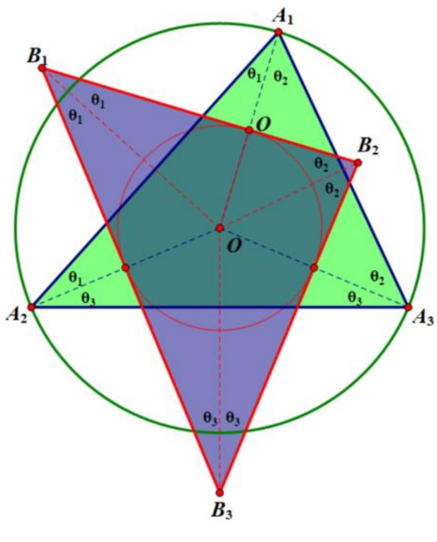
$$\Delta B_1B_2B_3=\frac{\overline{B_1B_2}r}{2}+\frac{\overline{B_2B_3}r}{2}+\frac{\overline{B_1B_3}r}{2}$$

$=\frac{r}{2}(\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\overline{B_3B_2})$　由引理1-3

$$=\frac{r^2}{2}[(\cot\theta_1+cot\theta_2)+(\cot\theta_2+cot\theta_3)+(\cot\theta_1+cot\theta_3)]$$

$$=r^2[\cot\theta_1+cot\theta_2+cot\theta_3]$$

$$=r^2[\frac{cos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}]$$



▲圖 18

故$\Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$面積比值$=\frac{r^2[\frac{cos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}]}{8r^2cos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3}=\frac{1}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$

性質2-6　若$\Delta A_1A_2A_3$為鈍角三角形($\angle A_1$為鈍角)，$\angle A_1=\theta_1+\theta_2$，$\angle A_2=\theta_3$，$\angle A_3=\theta_4$，O點為$\Delta A_1A_2A_3$外心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(外)心中垂三角形，則$\Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值$=\frac{-1}{8\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1\sin\theta_2}$。

證明：

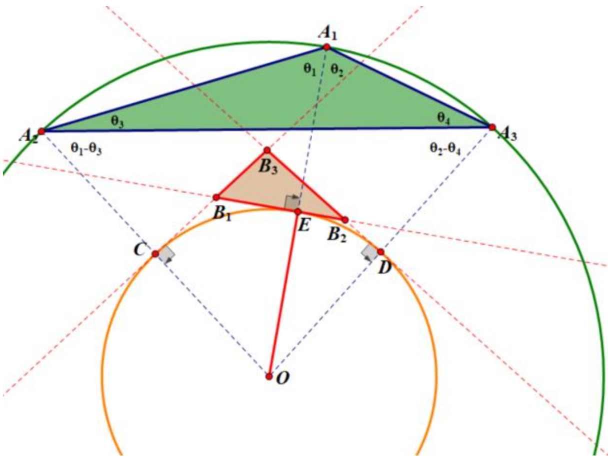
如圖19，由性質2-4，令$\Delta B_1B_2B_3$旁心圓半徑$\overline{OE}=r$，則$\Delta A_1A_2A_3$外接圓半徑R$=2r$

$$\because \Delta A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$=(4r\cos\theta_1)(4r\cos\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$=8r^2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2)\cdots\cdots(1)$$

又$\overline{B_1B_2}=r(cot\theta_1+cot\theta_2)=r\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{sin\theta_1 sin\theta_2}$



▲圖 19

由正弦定理與性質3-4可得

$$\overline{B_2B_3}=\frac{\mathrm{r}\sin(\theta_1+\theta_2)2sin\theta_1cos\theta_1}{sin\theta_1sin\theta_2[-\sin(2\theta_1+2\theta_2)]}$$

$$=\frac{rcos\theta_1}{sin\theta_2[-\cos(\theta_1+\theta_2)]}$$

代入$\Delta B_1B_2B_3=\frac{1}{2}\overline{B_1B_2}\cdot\overline{B_2B_3}\cdot\sin 2\theta_2$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{r}\sin(\theta_1+\theta_2)}{sin\theta_1sin\theta_2}\right]\cdot\left[\frac{rcos\theta_1}{sin\theta_2[-\cos(\theta_1+\theta_2)]}\right]\cdot\sin 2\theta_2$$

$$=-r^2\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)cos\theta_1cos\theta_2}{\cos(\theta_1+\theta_2)sin\theta_1sin\theta_2}=-r^2\tan(\theta_1+\theta_2)cot\theta_1cot\theta_2\cdots\cdots(2)$$

由(1)式與(2)式得$\Delta B_1B_2B_3$與$\Delta A_1A_2A_3$的面積比值$=\frac{-1}{8\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1\sin\theta_2}$

(三)點(垂)心中垂三角形的相關性質

性質2-7　若$\Delta A_1A_2A_3$為銳角三角形，D點為$\Delta A_1A_2A_3$垂心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(垂)心中垂三角形，則$\Delta B_1B_2B_3$的外心與$\Delta A_1A_2A_3$的垂心共點。

證明：

如圖20，$\because$ D為$\Delta A_1A_2A_3$之垂心，

若$\overrightarrow{A_1D}\perp\overline{A_2A_3}$於E，$\overrightarrow{A_2D}\perp\overline{A_1A_3}$於F，$\overrightarrow{A_3D}\perp\overline{A_1A_2}$於G

則GFA_3A_2四點共圓，可得$\theta_3=\theta_5$， $\Rightarrow\Delta$DB_1B_2為等腰三角形，又$\overrightarrow{A_1D}\perp\overline{B_1B_2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1D}$為$\overline{B_1B_2}$之中垂線，同理

$\because$ GEA_3A_1四點共圓，可得$\theta_1 = \theta_6$，

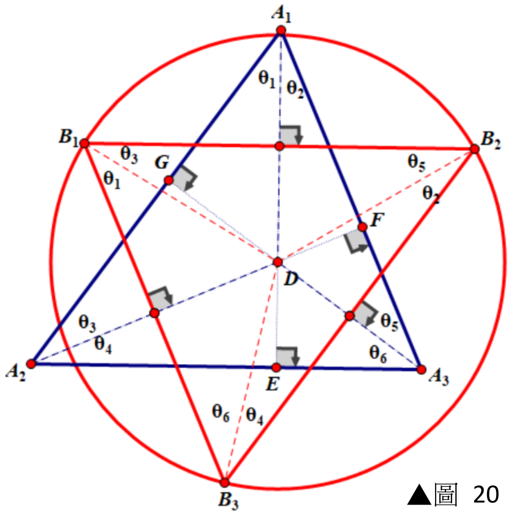
$\Rightarrow \Delta DB_1B_3$為等腰三角形，又$\overrightarrow{A_2D} \perp \overline{B_1B_3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_2D}$為$\overline{B_1B_3}$之中垂線

故可得D點為$\Delta B_1B_2B_3$之外心

令R為外接圓半徑，由外接圓半徑三角面積公式

$\Rightarrow \Delta B_1B_2B_3 = 2R^2 cos\theta_1 cosb_2 cos\theta_3$



▲圖 20

性質2-8　若$\Delta A_1A_2A_3$為銳角三角形，D點為$\Delta A_1A_2A_3$垂心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(垂)心中垂三角形，則$\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$。

證明：

由性質2-7與引理1-5可得角度對應關係如圖21-1，

可得$\angle A_1 = \angle B_3 = \theta_1 + \theta_2$

$\angle A_2 = \angle B_2 = \theta_2 + \theta_3$，$\angle A_3 = \angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$

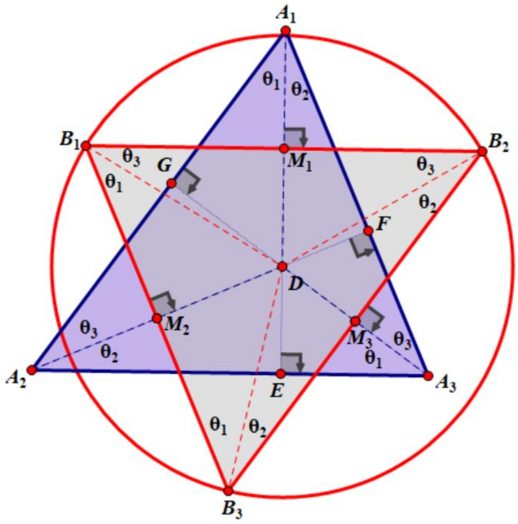
令$\overline{DA_1} = a$，$\overline{DA_2} = b$，$\overline{DA_3} = c$

由引理1-1可得$b = \frac{a\sin\theta_1}{\sin\theta_3}$，$c = \frac{a\sin\theta_2}{\sin\theta_3}$

$\because \overline{A_1A_2} = \overline{A_1G} + \overline{GA_2} = acos\theta_1 + bcos\theta_3$

$= a\left(cos\theta_1 + \frac{sin\theta_1 cos\theta_3}{sin\theta_3}\right) = a\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{sin\theta_3}$

$\overline{B_2B_3} = 2\overline{B_2M_3} = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot cot\theta_2 = \frac{a\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \cdot cot\theta_2 = a\frac{cos\theta_2}{sin\theta_3}$



▲圖 21-1

因$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_3}$，同理可證$\overline{A_2A_3} = \overline{B_1B_2}$，$\overline{A_3A_1} = \overline{B_1B_3}$

故$\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$，所以$\Delta B_3B_2B_1$與$\Delta A_1A_2A_3$面積比值為1。

小結：

1. 如圖21-2，由性質2-7，D_A同時為$\Delta A_1A_2A_3$垂心也是$\Delta B_1B_2B_3$外心，因此若D_B為$\Delta B_1B_2B_3$垂心則也會是$\Delta A_1A_2A_3$之外心，此外若取$\overline{D_AD_B}$中點N，

由<u>**九點圓性質**</u>可知，N必同時為$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta B_1B_2B_3$的九點圓圓心。

2.由性質2-8可發現，因為$\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta B_1B_2B_3$，

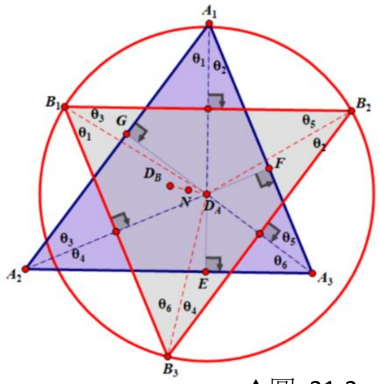
且對應邊分別平行，故$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta B_1B_2B_3$會是以

N點為點對稱中心旋轉180°的對稱圖形。

當$\Delta A_1A_2A_3$為直角三角形且$\angle A_1$為直角時，

此時垂心會與A_1兩點重合，無法建構出點(垂)心三角形，

接著我們討論鈍角的情況。



▲圖 21-2

性質2-9　若$\Delta A_1A_2A_3$為鈍角三角形，$\angle A_3 > 90°$，D點為$\Delta A_1A_2A_3$垂心，$\angle A_1 = \theta_1$，$\angle A_2 = \theta_2$，$\angle A_3 = \theta_3$，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(垂)心中垂三角形，則$\angle B_1 = \angle A_3 = \theta_3$，$\angle B_2 = \angle A_2 = \theta_2$，$\angle B_3 = \angle A_1 = \theta_1$。

證明：

$\because \overline{GD} \perp \overline{A_1A_2}$且$\overline{GD} \perp \overline{B_2B_3}$，

$\Rightarrow \overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_2B_3}$，同理

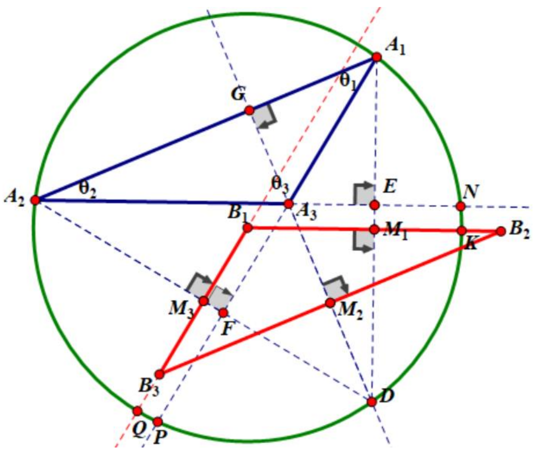
$\overline{A_1D} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$且$\overline{A_1D} \perp \overline{B_1B_2}$，　$\Rightarrow \overline{A_2A_3} \parallel \overline{B_1B_2}$，

$\overline{A_2D} \perp \overrightarrow{A_1A_3}$且$\overline{A_2D} \perp \overline{B_1B_3}$，　$\Rightarrow \overline{A_1A_3} \parallel \overline{B_1B_3}$

因此可得$\angle B_1 = \angle PA_3N = \angle A_3$且

$\angle B_2 = 90° - \angle M_2A_3N = 90° - \angle GA_3A_2 = \angle A_2$

$\angle B_3 = \angle M_2DF = 90° - \angle FA_3D = 90° - \angle GA_3A_1 = \angle A_1$



▲圖 22

性質2-10　若$\Delta A_1A_2A_3$為鈍角三角形，$\angle A_3 > 90°$，D點為$\Delta A_1A_2A_3$垂心，$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的點(垂)心中垂三角形，則$\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$且$\Delta A_1A_2A_3$的垂心D為$\Delta B_1B_2B_3$的外心。

證明:

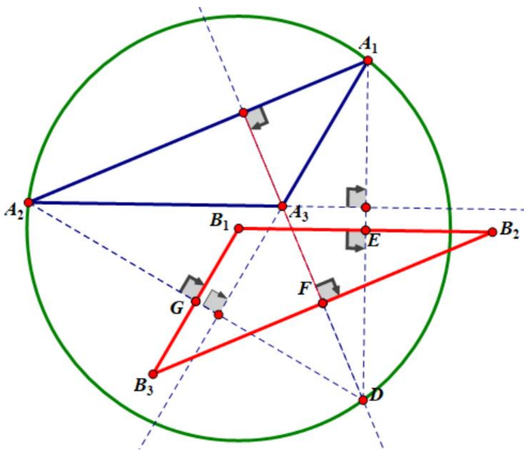
如圖23 $\because \overline{B_1B_3}$為$\overline{A_2D}$中垂線，$\overline{B_2B_3}$為$\overline{A_3D}$中垂線，

$\Rightarrow B_3$為ΔA_3A_2D之外心

$\Rightarrow \overline{B_3A_3} = \frac{\overline{A_2D}}{2sin\angle A_2A_3D}$(正弦定理)

又$\overline{B_1B_3}$為$\overline{A_2D}$中垂線，$\overline{B_2B_1}$為$\overline{A_1D}$中垂線，

$\Rightarrow B_1$為ΔA_1A_2D之外心



▲圖 23

$\Rightarrow \overline{B_1\mathrm{D}} = \frac{\overline{A_2D}}{2sin\angle A_2A_1D}$，因$\angle A_2A_3D = \pi - \angle A_2A_1D$

得$\overline{B_3A_3} = \overline{B_1\mathrm{D}}$，又$\overline{B_3A_3} = \overline{B_3\mathrm{D}}$

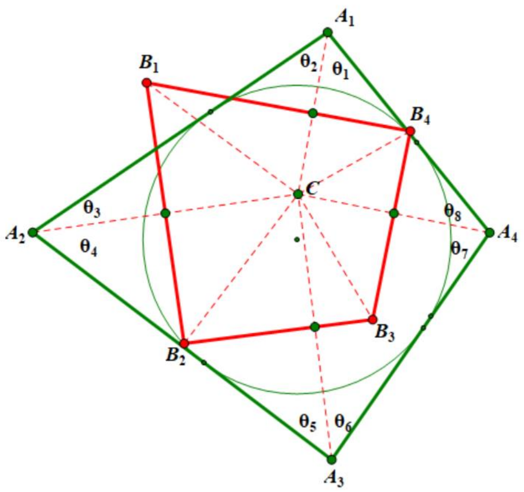
$\Rightarrow \overline{B_3A_3} = \overline{B_1\mathrm{D}} = \overline{B_3\mathrm{D}}$，

$\therefore \Delta B_1\mathrm{DG} \cong \Delta B_3\mathrm{DG}$ (RHS)得$\overline{B_1G} = \overline{B_3\mathrm{G}}$，此時根據性質3-9

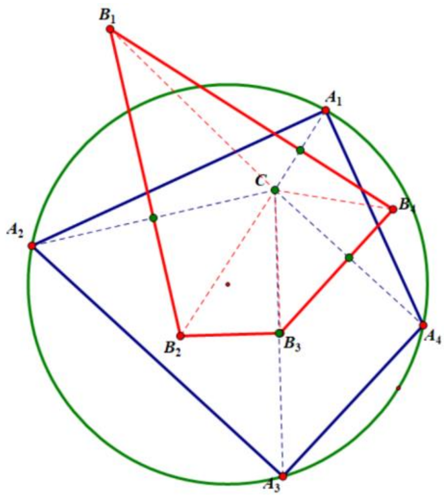
並由<u>尤拉線性質</u>可給出$\overline{A_1A_3} = 2\overline{B_1G}$，$\Rightarrow \overline{B_1B_3} = \overline{A_1A_3}$ $\Rightarrow \Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$ (ASA)

三、圓外切與圓內接四邊形點心中垂四邊形的相關性質

分別將圓外切與圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中的四個頂點A_1、A_2、A_3、A_4，與**內部任一點C點**作連線所得$\overline{A_1C}$、$\overline{A_2C}$、$\overline{A_3C}$、$\overline{A_4C}$分別作中垂線，若四條中垂線的交點分別交於B_1、B_2、B_3、B_4四點，連接四點所得四邊形我們稱為點(內)心與點(外)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$如下圖。



▲ 點(內)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$



▲ 點(外)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$

我們先研究以下引理

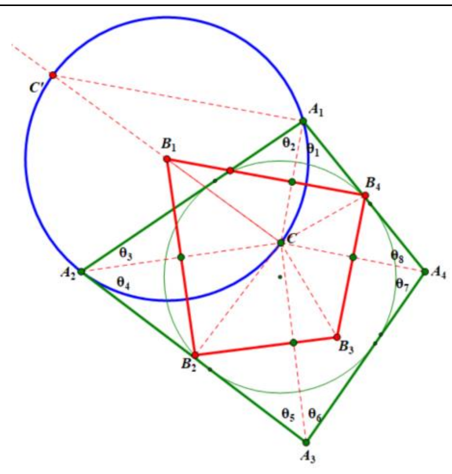
引理2-1 在四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，C點為內部**任一點**，C點到四頂點連線所構成八個角分別為$\theta_1 \sim \theta_8$(如上圖)，則在點心四邊形$B_1B_2B_3B_4$中，$\angle CB_1B_4 = \theta_3$，$\angle CB_1B_2 = \theta_2$，$\angle CB_2B_1 = \theta_5$，$\angle CB_2B_3 = \theta_4$，$\angle CB_3B_2 = \theta_7$，$\angle CB_3B_4 = \theta_6$，$\angle CB_4B_1 = \theta_8$，$\angle CB_4B_3 = \theta_1$。

證明：

如右圖，$\because B_1$為$\overline{B_1B_2}$及$\overline{B_1B_4}$兩中垂線的交點，

故B_1為ΔCA_1A_2外心，

在$\overrightarrow{\mathrm{C}B_1}$上取一點$C'$，使得$\overrightarrow{\mathrm{C}C'} = 2\overrightarrow{\mathrm{C}B_1}$，



$\Rightarrow A_1C'A_2C$四點共圓，連接C'、A_1，因為$\overline{CC'}$為直徑，

$\Rightarrow \angle C'A_1C = 90° \Rightarrow \overline{B_1B_4} \parallel \overline{C'A_1}$

$\Rightarrow \angle CB_1B_4 = \angle CC'A_1 = \angle A_1A_2C = \theta_3$

故$\angle CB_1B_4 = \theta_3$，同理可證其餘七個角會分別對應。

有了角度關係，便可開始研究四邊形點(內)心中垂四邊形

(一)圓外切四邊形與其點(內)心中垂四邊形的相關性質

性質3-1 圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，I為其內心，四邊形$B_1B_2B_3B_4$為其點(內)心四邊形，則B_1、I、B_3與B_2、I、B_4分別共線，即I為四邊形$B_1B_2B_3B_4$對角線之交點。

證明:

如圖25，由引理2-1，

ΔB_2B_1I中，$\angle B_2IB_1 = 180° - (\theta_1 + \theta_3)$，

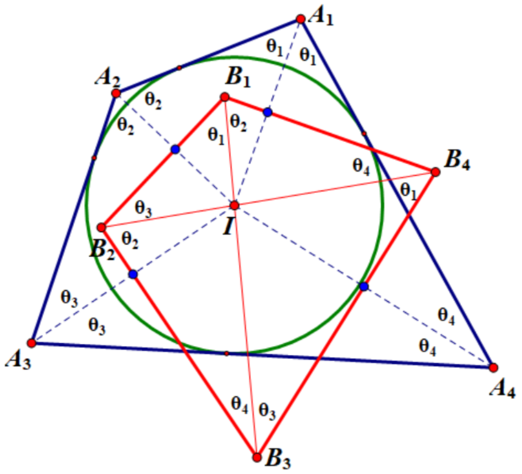
ΔB_4B_1I中，$\angle B_4IB_1 = 180° - (\theta_2 + \theta_4)$，

$\because \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 180°$，

$\therefore \angle B_2IB_4 = \angle B_2IB_1 + \angle B_4IB_1 = 360° - 180° = 180°$

同理，$\angle B_1IB_3 = \angle B_2IB_1 + \angle B_2IB_3 = 180°$

故I為四邊形$B_1B_2B_3B_4$對角線之交點



▲圖 25

性質3-2 若$A_1A_2A_3A_4$為圓外切四邊形，r為其內切圓半徑，$\angle A_1 = 2\theta_1$，$\angle A_2 = 2\theta_2$，$\angle A_3 = 2\theta_3$，$\angle A_4 = 2\theta_4$，r為內切圓半徑，則其點(內)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$四邊長分別為$\overline{B_1B_2} = \frac{r\sin(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$，$\overline{B_2B_3} = \frac{r\sin(\theta_2+\theta_4)}{2\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$，$\overline{B_3B_4} = \frac{r\sin(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_4}$，$\overline{B_4B_1} = \frac{r\sin(\theta_2+\theta_4)}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_4}$。

證明：

如圖25，$\because \overline{IA_1} = \frac{r}{\sin\theta_1}$，$\overline{IA_2} = \frac{r}{\sin\theta_2}$，$\overline{IA_3} = \frac{r}{\sin\theta_3}$，$\overline{IA_4} = \frac{r}{\sin\theta_4}$

$\Rightarrow \overline{B_1B_2} = \frac{\overline{IA_2}}{2}(cot\theta_1 + cot\theta_3) = \frac{r\sin(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$，

$\overline{B_2B_3} = \frac{\overline{IA_3}}{2}(cot\theta_2 + cot\theta_4) = \frac{r\sin(\theta_2+\theta_4)}{2\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$，

$\overline{B_3B_4} = \frac{\overline{IA_4}}{2}(cot\theta_1 + cot\theta_3) = \frac{r\sin(\theta_1+\theta_3)}{2\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_4}$，

$$\overline{B_1B_4}=\frac{\overline{IA_1}}{2}(cot\theta_2+cot\theta_4)=\frac{r\sin(\theta_2+\theta_4)}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_4}$$

接著便可得點(內)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$的面積

> 性質3-3 若四邊形$B_1B_2B_3B_4$為圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$的點(內)心四邊形，則四邊形
>
> $B_1B_2B_3B_4$的面積$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}]^2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_3)\sin(\theta_1+\theta_4)$。

證明:

如圖26，由性質3-1，圓外切四邊形$B_1B_2B_3B_4$面積

$$=\Delta B_1B_2B_3+\Delta B_1B_4B_3$$

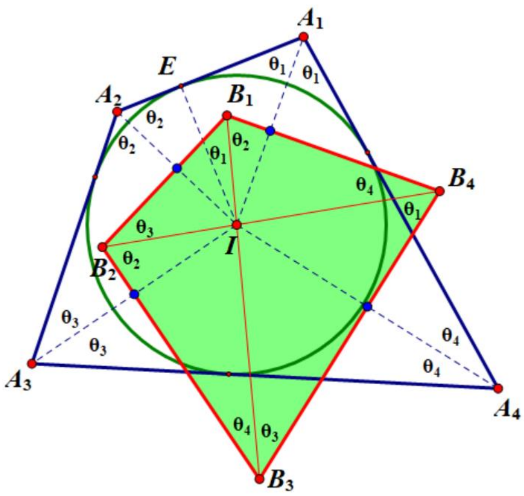
$$=\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)\sin(\theta_2+\theta_4)\sin(\theta_2+\theta_3)}{(\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)(\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4)}+\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)\sin(\theta_2+\theta_4)\sin(\theta_1+\theta_4)}{(\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_4)(\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_4)}$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot\left(\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}\right)^2\sin(\theta_2+\theta_3)\cdot[\sin\theta_1\sin\theta_4+\sin\theta_2\sin\theta_3]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot\left(\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}\right)^2\sin(\theta_2+\theta_3)\cdot[\frac{\cos(\theta_1-\theta_4)+\cos(\theta_2-\theta_3)}{2}]$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot\left(\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}\right)^2\sin(\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_3+\theta_4)\sin(\theta_2+\theta_4)$$

$$=\frac{r^2}{8}\cdot\left(\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}\right)^2\sin(\theta_1+\theta_4)\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_3)$$



▲ 圖 26

接著求原四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積：

如圖26$\because\ \overline{A_1A_2}=r(cot\theta_1+cot\theta_2)$，

$\overline{A_2A_3}=r(cot\theta_2+cot\theta_3)$，

$\overline{A_3A_4}=r(cot\theta_3+cot\theta_4)$，$\overline{A_4A_1}=r(cot\theta_4+cot\theta_1)$，

四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積$=\frac{r}{2}(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_1})$

$$=r^2(cot\theta_1+cot\theta_2+cot\theta_3+cot\theta_4)$$

$$=r^2\frac{cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4+cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_4+cos\theta_3\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_4+cos\theta_4\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$$

$$=r^2\frac{\sin\theta_3\sin\theta_4 sin(\theta_1+\theta_2)+\sin\theta_1\sin\theta_2 sin(\theta_3+\theta_4)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}=r^2\frac{sin(\theta_1+\theta_2)sin(\theta_1+\theta_4)sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$$

根據性質3-3可得面積比值：

性質3-4 若四邊形$B_1B_2B_3B_4$為圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$的點(內)心四邊形，則四邊形$B_1B_2B_3B_4$與原四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積比值＝$\frac{[\sin(\theta_1+\theta_3)]^2}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$

（二）圓內接四邊形與其點(外)心中垂四邊形的相關性質

性質3-5 圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，O為其外心，四邊形$B_1B_2B_3B_4$為其點(外)心四邊形，則O點為四邊形$B_1B_2B_3B_4$對之內心。此時R=2r，R：$A_1A_2A_3A_4$外接圓半徑，r：$B_1B_2B_3B_4$內切圓半徑。

說明：

因為O為外心⇒ $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\overline{OA_3}=\overline{OA_4}$

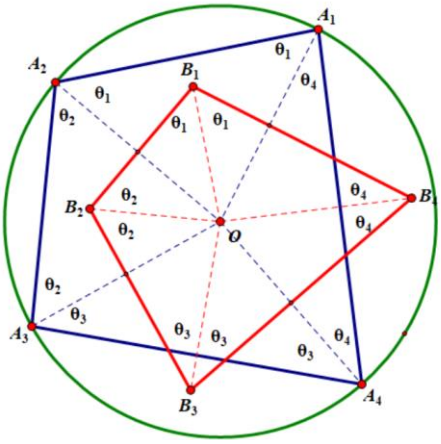
令$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\theta_1$，$\angle OA_2A_3=\angle OA_3A_2=\theta_2$

$\angle OA_3A_4=\angle OA_4A_3=\theta_3$，$\angle OA_4A_1=\angle OA_1A_4=\theta_4$

根據引理2-1可得$\overline{OB_1}$為$\angle B_1$分角線，同理

$\overline{OB_2}$為$\angle B_2$分角線，$\overline{OB_3}$為$\angle B_3$分角線，

故O點為四邊形$B_1B_2B_3B_4$對之內心，



▲ 圖 27

又此時角度設定與圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$相同，因此面積公式也會相同：

性質3-6 若四邊形$B_1B_2B_3B_4$為圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的點(外)心四邊形，則四邊形$B_1B_2B_3B_4$的面積＝$r^2\frac{sin(\theta_1+\theta_2)sin(\theta_1+\theta_4)sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$。

最後計算圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的面積，如圖27

四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積＝$\frac{R^2}{2}[\sin(\pi-2\theta_1)+\sin(\pi-2\theta_2)+\sin(\pi-2\theta_3)+\sin(\pi-2\theta_4)]$

$=4r^2[2\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)+2\sin(\theta_3+\theta_4)\cos(\theta_3-\theta_4)]$

$=4r^2\sin(\theta_1+\theta_2)[\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_3-\theta_4)]$

$=8r^2\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_4)\sin(\theta_2+\theta_3)=8r^2\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_3)\sin(\theta_1+\theta_4)$

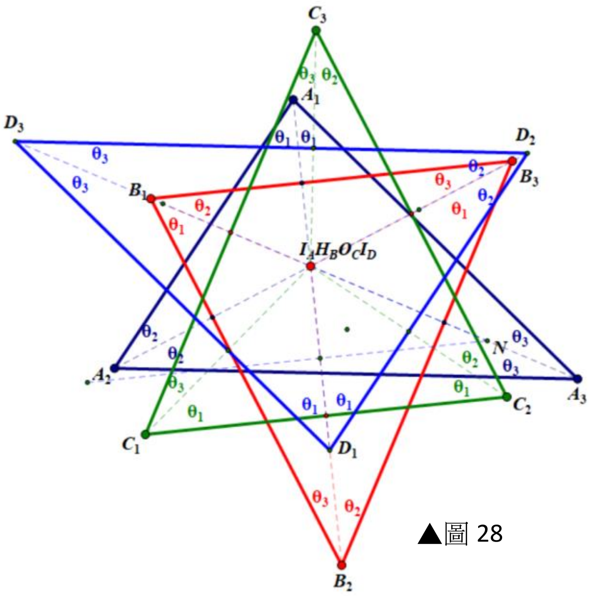
因此可得$B_1B_2B_3B_4$為圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積比值：

性質3-7 若四邊形$B_1B_2B_3B_4$為圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的點(外)心四邊形，則四邊形$B_1B_2B_3B_4$與原四邊形$A_1A_2A_3A_4$面積比值＝$\frac{1}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$。

陸、討論

一、重複操作點(內)心中垂三角形關係之探討

從以上研究過程中，我們發現原三角形內心與點(內)心三角形垂心共點，而原三角形垂心與點(垂)心三角形外心共點，原三角形外心與點(外)心三角形內心共點，也就是最後會回到內心，為什麼會有這麼有趣的現象，於是探討其發生原因。



▲圖 28

如圖28，從$\Delta A_1A_2A_3$的內心開始，操作第一次點心中垂可得$\Delta B_1B_2B_3$，第二次可得$\Delta C_1C_2C_3$，第三次可得$\Delta D_1D_2D_3$，由研究過程可知$\Delta A_1A_2A_3$內心與$\Delta B_1B_2B_3$垂心與$\Delta C_1C_2C_3$外心與$\Delta D_1D_2D_3$內心共點，即I_A與H_B與O_C與I_D四點共點。接著觀察四個三角形角度間變化關係：

$\Delta A_1A_2A_3$(內心)	$\angle A_1 = 2\theta_1$	$\angle A_2 = 2\theta_2$	$\angle A_3 = 2\theta_3$
$\Delta B_1B_2B_3$(垂心)	$\angle B_1 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle B_2 = \theta_2 + \theta_3$	$\angle B_3 = \theta_1 + \theta_3$
$\Delta C_1C_2C_3$(外心)	$\angle C_1 = \theta_1 + \theta_3$	$\angle C_2 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle C_3 = \theta_2 + \theta_3$
$\Delta D_1D_2D_3$(內心)	$\angle D_1 = 2\theta_1$	$\angle D_2 = 2\theta_2$	$\angle D_3 = 2\theta_3$

1. 由上表可知連續疊作三次，角度轉換後角會對應相等，因此第n次會和第n+3次操作三角形相似，在$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta B_1B_2B_3$中，因$\angle A_1IB_2 = \sum_{i=1}^{3}(90-\theta_i) = 180°$，可得$\overline{A_1IB_2}$共線，同理$\overline{A_2IB_3}$、$\overline{A_3IB_1}$共線；在$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta D_1D_2D_3$中，因$\angle A_1ID_1 = \angle A_2ID_2 = \angle A_3ID_3 = \sum_{i=1}^{3}(90-\theta_i) = 180°$，可得$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta D_1D_2D_3$相似之外，對應邊平行。
2. 根據性質2-8，第一次疊作與第二次疊作所得$\Delta B_1B_2B_3 \cong \Delta C_1C_2C_3$。
3. 因$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$，計算其面積比：

已知：$\Delta A_1A_2A_3$內心為I，疊作三次所得為$\Delta D_1D_2D_3$

求證：$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta D_1D_2D_3$面積比為$(8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$：1

證明：如圖28，令$\overline{IA_1}=2a_1$，$\overline{H_BB_1}=2a_2$，$\overline{O_CC_1}=2a_3$，$\overline{I_DD_1}=2a_4$，

$\because 2a_2=\frac{a_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow a_2=\frac{a_1}{2\sin\theta_2}$，$2a_3=\frac{a_2}{\sin\theta_3}\Rightarrow a_3=\frac{a_2}{2\sin\theta_3}=\frac{a_1}{4\sin\theta_2\sin\theta_3}$

$$2a_4=\frac{a_3}{\sin\theta_1}\Rightarrow a_4=\frac{a_3}{2\sin\theta_1}=\frac{a_1}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$$

故a_1：$a_4=(8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)$：1，又因$\Delta A_1A_2A_3\sim\Delta D_1D_2D_3$

可得面積比為$(8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$：1。

由以上結果，也讓我們更深刻了解點(內)、點(垂)、點(外)之**面積比**為何會如此簡潔：

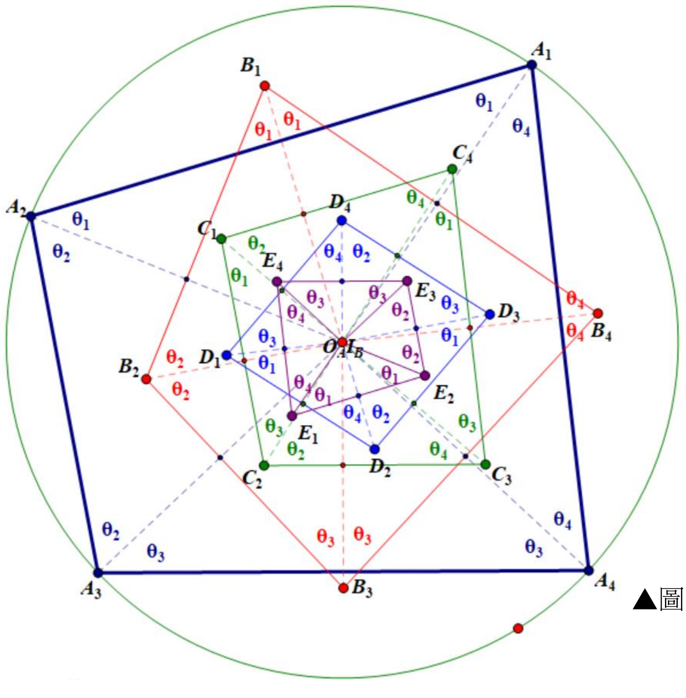
$\because \frac{\Delta A_1A_2A_3(\text{內})}{\Delta B_1B_2B_3(\text{垂})}=8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$， $\frac{\Delta B_1B_2B_3(\text{垂})}{\Delta C_1C_2C_3(\text{外})}=1$ ， $\frac{\Delta C_1C_2C_3(\text{外})}{\Delta D_1D_2D_3(\text{內})}=8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$

$\therefore \frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta D_1D_2D_3}=(8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$

有了三角形疊作給了我們靈感，繼續延伸四邊形

二、重複操作點(外)心中垂四邊形關係之探討

由性質4-5我們知道了圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$之外心O點為點(外)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$之內心，再由性質4-1得知圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$之內心I點為點(內)心四邊形$B_1B_2B_3B_4$之對角線交點，若以對角線交點為心繼續疊作，有沒有可能會回到外心呢？



▲圖 29

如圖29，從四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外心O開始，操作四次可得四邊形$B_1B_2B_3B_4$、$C_1C_2C_3C_4$、$D_1D_2D_3D_4$、$E_1E_2E_3E_4$，根據引理2-1我們先觀察角度間變化關係：

$A_1A_2A_3A_4$(外)	$\angle A_1=\theta_4+\theta_1$	$\angle A_2=\theta_1+\theta_2$	$\angle A_3=\theta_2+\theta_3$	$\angle A_4=\theta_3+\theta_4$
$B_1B_2B_3B_4$(內)	$\angle B_1=2\theta_1$	$\angle B_2=2\theta_2$	$\angle B_3=2\theta_3$	$\angle B_4=2\theta_4$
$C_1C_2C_3C_4$(交)	$\angle C_1=\theta_2+\theta_1$	$\angle C_2=\theta_3+\theta_2$	$\angle C_3=\theta_4+\theta_3$	$\angle C_4=\theta_1+\theta_4$
$D_1D_2D_3D_4$(∥)	$\angle D_1=\theta_3+\theta_1$	$\angle D_2=\theta_4+\theta_2$	$\angle D_3=\theta_1+\theta_3$	$\angle D_4=\theta_2+\theta_4$
$E_1E_2E_3E_4$(外)	$\angle E_1=\theta_4+\theta_1$	$\angle E_2=\theta_1+\theta_2$	$\angle E_3=\theta_2+\theta_3$	$\angle E_4=\theta_3+\theta_4$

1. 由上表可知經由四次操作角度轉換後$\angle A_i=\angle E_i$且此時角度組成順序相同，故會有外心，因皆有外接圓且角度順序相同故$A_1A_2A_3A_4\sim E_1E_2E_3E_4$。
2. 操作第三次所得$D_1D_2D_3D_4$為**平行四邊形**，第二次所得$C_1C_2C_3C_4$雖然四個角角度雖與原四邊形$A_1A_2A_3A_4$相同，但因組成順序不同，因此不相似。

3. 接著計算$A_1A_2A_3A_4$與$E_1E_2E_3E_4$面積比

已知：四邊形$A_1A_2A_3$外心為O，疊作四次所得為四邊形$E_1E_2E_3E_4$

求證：$A_1A_2A_3A_4$與$E_1E_2E_3E_4$面積比為$(16\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$：1

證明：如圖29，令$\overline{OA_1}=2a_1$，$\overline{OB_1}=2a_2$，$\overline{OC_1}=2a_3$，$\overline{OD_1}=2a_4$，$\overline{OE_1}=2a_5$，

$$\because 2a_2=\frac{a_1}{\sin\theta_1}\Rightarrow a_2=\frac{a_1}{2\sin\theta_1}$$

$$2a_3=\frac{a_2}{\sin\theta_2}\Rightarrow a_3=\frac{a_2}{2\sin\theta_2}=\frac{a_1}{4\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

$$2a_4=\frac{a_3}{\sin\theta_3}\Rightarrow a_4=\frac{a_3}{2\sin\theta_3}=\frac{a_1}{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$$

$$2a_5=\frac{a_4}{\sin\theta_4}\Rightarrow a_4=\frac{a_4}{2\sin\theta_4}=\frac{a_1}{16\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$$

故可得a_1：a_5 =($16\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$)：1，同理

$$\overline{OE_2}=\frac{\overline{OD_2}}{2\sin\theta_1}=\frac{\overline{OC_2}}{4\sin\theta_1\sin\theta_4}=\frac{\overline{OB_2}}{8\sin\theta_1\sin\theta_4\sin\theta_3}=\frac{\overline{OA_2}}{16\sin\theta_1\sin\theta_4\sin\theta_3\sin\theta_2}$$

$\overline{OE_3}=\frac{\overline{OA_3}}{16\sin\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_4\sin\theta_3}$， $\overline{OE_4}=\frac{\overline{OA_4}}{16\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_4}$，又因$A_1A_2A_3A_4\sim E_1E_2E_3E_4$

可得面積比為$(16\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$：1。

小結：

1. 四邊形若有外心(或內心)，重複操作4n次可得相似四邊形且外心(或內心)共點。

2. 四邊形中$B_1B_2B_3B_4$(第1層)與$D_1D_2D_3D_4$(第3層)之頂點與外心O共線⇒ $\overline{B_1OD_2}$、$\overline{B_2OD_3}$、$\overline{B_3OD_4}$、$\overline{B_4OD_1}$;四邊形$A_1A_2A_3A_4$(第0層)與$E_1E_2E_3E_4$(第4層)之頂點與外心O共線⇒ $\overline{A_1OE_1}$、$\overline{A_2OE_2}$、$\overline{A_3OE_3}$、$\overline{A_4OE_4}$,又$\because \angle OE_1E_4 = \angle OA_1A_4$,$\angle OE_4E_3 = \angle OA_4A_3$,$\angle OE_3E_2 = \angle OA_3A_2$,$\angle OE_2E_1 = \angle OA_2A_1$內錯角相等,因此四邊形$A_1A_2A_3A_4$與$E_1E_2E_3E_4$相似之外,對應邊也平行。

三、重複操作點(外)心中垂n邊形關係之探討

(一)角度變化

將一開始的圓內接n邊形定義第0層,角度分別為$\angle A_1^0 = \theta_n + \theta_1$、$\angle A_2^0 = \theta_1 + \theta_2$、⋯⋯、$\angle A_n^0 = \theta_{n-1} + \theta_n$,將頂點與外心連線作中垂所圍之n邊形為第一層$A_1^1A_2^1 \dots A_n^1$,重複操作第二次得第二層$A_1^2A_2^2 \dots A_3^2$,依此類推到第n層$A_1^nA_2^n \dots A_3^n$,經觀察可得角度變化關係如下:

	$\angle A_1^i$	$\angle A_2^i$	$\angle A_3^i$	$\angle A_4^i$	$\angle A_5^i$	…….	$\angle A_n^i$
$i=0$	$\theta_n+\theta_1$	$\theta_1+\theta_2$	$\theta_2+\theta_3$	$\theta_3+\theta_4$	$\theta_4+\theta_5$		$\theta_{n-1}+\theta_n$
$i=1$	$2\theta_1$	$2\theta_2$	$2\theta_3$	$2\theta_4$	$2\theta_5$		$2\theta_n$
$i=2$	$\theta_2+\theta_1$	$\theta_3+\theta_2$	$\theta_4+\theta_3$	$\theta_5+\theta_4$	$\theta_6+\theta_5$		$\theta_1+\theta_n$
$i=3$	$\theta_3+\theta_1$	$\theta_4+\theta_2$	$\theta_5+\theta_3$	$\theta_6+\theta_4$	$\theta_7+\theta_5$		$\theta_2+\theta_n$
$i=4$	$\theta_4+\theta_1$	$\theta_5+\theta_2$	$\theta_6+\theta_3$	$\theta_7+\theta_4$	$\theta_1+\theta_5$		$\theta_3+\theta_n$
$i=5$	$\theta_5+\theta_1$	$\theta_6+\theta_2$	$\theta_7+\theta_3$	$\theta_1+\theta_4$	$\theta_2+\theta_5$		$\theta_4+\theta_n$
……							………
$i=\mathrm{n}$	$\theta_n+\theta_1$	$\theta_1+\theta_2$	$\theta_2+\theta_3$	$\theta_3+\theta_4$	$\theta_4+\theta_5$		$\theta_{n-1}+\theta_n$

由上表可知n次操作後外心共點,且角度順序相同,故$A_1^1A_2^1 \dots A_n^1 \sim A_1^nA_2^n \dots A_n^n$。

(二)邊長關係

已知:n邊形$A_1^0A_2^0 \dots A_n^0$外心為O,重複操作n次所得n邊形$A_1^nA_2^n \dots A_n^n$

求證:兩多邊形邊長比為$(2^n sin\theta_1 sin\theta_2 \cdot \dots \cdot sin\theta_n)$:1

證明:令$\overline{OA_1^1} = 2a_1$,$\overline{OA_1^2} = 2a_2$,⋯⋯, $\overline{OA_1^n} = 2a_n$,

$\because a_2 = \frac{a_1}{2\sin\theta_1}$,$a_3 = \frac{a_2}{2\sin\theta_2} = \frac{a_1}{4\sin\theta_1\sin\theta_2}$,⋯⋯,可得$a_n = \frac{a_1}{2^n sin\theta_1 sin\theta_2 \cdot \dots \cdot sin\theta_n}$

故a_1:$a_n = (2^n sin\theta_1 sin\theta_2 \cdot \dots \cdot sin\theta_n)$:1,又$A_1^1A_2^1 \dots A_n^1 \sim A_1^nA_2^n \dots A_n^n$

可得邊長比為$(2^n sin\theta_1 sin\theta_2 \cdot \dots \cdot sin\theta_n)$:1

(三)共線關係

從圓內接n邊形為第0層開始,

已知:n邊形$A_1^0A_2^0 \dots A_n^0$外心為O,重複操作i次所得n邊形$A_1^iA_2^i \dots A_n^i$,j次所得n邊形$A_1^jA_2^j \dots A_n^j$

求證：當$i+j\equiv 0 \pmod{n}$，兩多邊形頂點與外心O共線

證明：$\because \angle \mathrm{A}_k^0 O \mathrm{A}_k^n = \angle \mathrm{A}_k^0 O \mathrm{A}_{k+1}^0 + \angle \mathrm{A}_{k+1}^0 O \mathrm{A}_{k+1}^1 + \angle \mathrm{A}_{k+1}^1 O \mathrm{A}_{k+1}^2 + \cdots + \angle \mathrm{A}_{k+1}^{n-2} O \mathrm{A}_{k+1}^{n-1} - \angle \mathrm{A}_{k+1}^{n-1} O \mathrm{A}_k^n$

$= (180° - 2\theta_k) + (90° - \theta_{k+1}) + (90° - \theta_{k+2}) + \cdots + (90° - \theta_{k-1}) - (90° - \theta_k)$

$= 180° + 90°(n-2) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = 180° + 90°(n-2) - 90(n-2) = 180°$，

可得層數mod$n$同餘時，頂點皆與外心O共線，同理

$\angle \mathrm{A}_k^t O \mathrm{A}_{k+t}^{n-t} = \angle \mathrm{A}_k^t O \mathrm{A}_{k+1}^t + \angle \mathrm{A}_{k+1}^t O \mathrm{A}_{k+1}^{t+1} + \cdots + \angle \mathrm{A}_{k+1}^{n-t-1} O \mathrm{A}_{k+1}^{n-t} + \angle \mathrm{A}_{k+1}^{n-t} O \mathrm{A}_{k+2}^{n-t} + \angle \mathrm{A}_{k+2}^{n-t} O \mathrm{A}_{k+3}^{n-t} + \cdots + \angle \mathrm{A}_{k+(t-1)}^{n-t} O \mathrm{A}_{k+t}^{n-t}$

$= 180° + 90°(n-2) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = 180°$可得$i+j=0 \pmod{n}$時，兩層頂點與外心$O$共線，故當$i+j\equiv 0 \pmod{n}$，兩多邊形頂點與外心$O$共線。

柒、結論

研究結果如下：

一、點心中垂三角形

點心中垂三角形	相關性質	$\frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta B_1B_2B_3}$
點(內)心	1. 旁心三角形縮小$\frac{1}{2}$之圖形 2. 原三角形內心與其垂心共點 3. 三組底角與原三角形三組底角共圓[性質1-5]	$8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
點(旁)心	1. 底邊與點(內)中垂三角形其中一邊平行且等長 2. 與原三角形共圓 3. 頂點與點(內)心三角形之頂點產生兩組共圓[性質1-14] 4. 原三角形旁心與其垂心共點	$8\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$ $8\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$ $8\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$
點(重)心	原三角形外心與其重心共點	$\frac{3abc}{R(a^2+b^2+c^2)}$
點(外)心	原三角形為**銳角**三角形時： 原三角形外心與其內心共點	$8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$
	原三角形為**鈍角**三角形時： 原三角形外心與其旁心共點	$-8\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1\sin\theta_2$
點(垂)心	1. 原三角形垂心與其外心共點 2. $\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta B_1B_2B_3$的九點圓圓心共點	比值為1

定理. 點(旁)心中垂三角形面積和=點(內)心中垂三角形面積 [參照p. 9]

二、點心中垂四邊形

點心中垂四邊形	相關性質	四邊形$B_1B_2B_3B_4$	$\frac{A_1A_2A_3A_4}{B_1B_2B_3B_4}$
點(內)心	原四邊形內心為$B_1B_2B_3B_4$對角線交點	$\frac{r^2}{8}\cdot[\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}]^2$ $\times\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_3)\sin(\theta_1+\theta_4)$	$\frac{8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}{[\sin(\theta_1+\theta_3)]^2}$
點(外)心	原四邊形外心為$B_1B_2B_3B_4$的內心	$\frac{r^2 sin(\theta_1+\theta_2)sin(\theta_1+\theta_4)sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4}$	$8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4$

三、重複疊作後之共點與共線性質

(一)從$\Delta A_1A_2A_3$的內心I開始疊作，將$\Delta A_1A_2A_3$視為第0層，則：

1. 第m層與第m+3層皆**相似**且對應邊平行，面積比$(8\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$。

2. 在第i層中，$i\equiv 0(mod3)$之內心與$i\equiv 1(mod3)$之垂心與$i\equiv 2(mod3)$之外心皆共點。

3. $i\equiv 0(mod3)$之頂點與$i\equiv 1(mod3)$之頂點與I三點共線。

(二)從四邊形$A_1A_2A_3A_4$的外心O開始疊作視為第0層，則：

1. 第m層與第m+4層皆**相似**且對應邊平行，面積比$(16\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3)^2$。

2. 第i層中，$i\equiv 0(mod4)$之外心與$i\equiv 1(mod4)$之內心與$i\equiv 2(mod4)$之對角線交點皆共點。

3. $i\equiv 0(mod4)$與$i\equiv 1(mod4)$之頂點與O共線，$i\equiv 1(mod4)$與$i\equiv 3(mod4)$之頂點與O共線。

(三)從圓內接n邊形的外心O開始疊作，則：

1. 第m層與第m+n層皆**相似**且對應邊平行，面積比$(2^n sin\theta_1 sin\theta_2\cdot\ldots\cdot sin\theta_n)^2$。

2. 當$i+j\equiv 0(modn)$，兩多邊形頂點與外心O共線。

捌、參考資料及其他

一、張幼賢(2022)。國中數學課本第四冊。翰林出版社。

二、張幼賢(2022)。國中數學課本第五冊。翰林出版社。

三、陳平、郭晨馨、簡靖承(2022)。頂心三角形誕生的奇蹟。中華民國第61屆中小學科學展覽會作品，取自https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-050404.pdf